FYZIKA

6. MECHANIKA TUHÝCH TĚLES

-

STUDIJNÍ TEXTY PRO 1. ROČNÍK

Frolíková Martina

Augustynek Martin

Adamec Ondřej

OSTRAVA 2006

Budeme rádi, když nám jakékoliv případné dotazy a připomínky k textům zašlete na kterýkoliv z těchto kontaktů:

martina.frolikova@iuventas.cz
martin.augustynek@iuventas.cz
ondrej.adamec@iuventas.cz

Obsah

6.1 Úvod do problematiky

Až dosud jsme při studiu pohybových účinků sil na těleso nahrazovali pevné tělesa hmotným bodem. Nyní se zaměříme na řešení problémů, při nichž nelze zanedbat problémy tělesa ani jeho tvar a je třeba uvažovat také otáčivý pohyb tělesa.

Abychom naše úvahy zjednodušili, budeme předpokládat, že síly, které na těleso působí, mají pouze pohybové účinky a nezmění tedy tvar ani objem tělesa. To znamená, že budeme zanedbávat deformační účinky sil.

Skutečné těleso nahradíme myšlenkovým modelem, který nazveme „Tuhé těleso“.

Tuhé těleso je ideální těleso, jehož tvar ani objem se účinkem libovolně velkých sil nemění.

6.2 Pohyb tuhého tělesa

Každý pohyb tuhého tělesa si můžeme představit jako pohyb složený z:

- pohybu posuvného (translace)
- pohybu otáčivého (rotace)

6.2.1 Pohyb posuvný

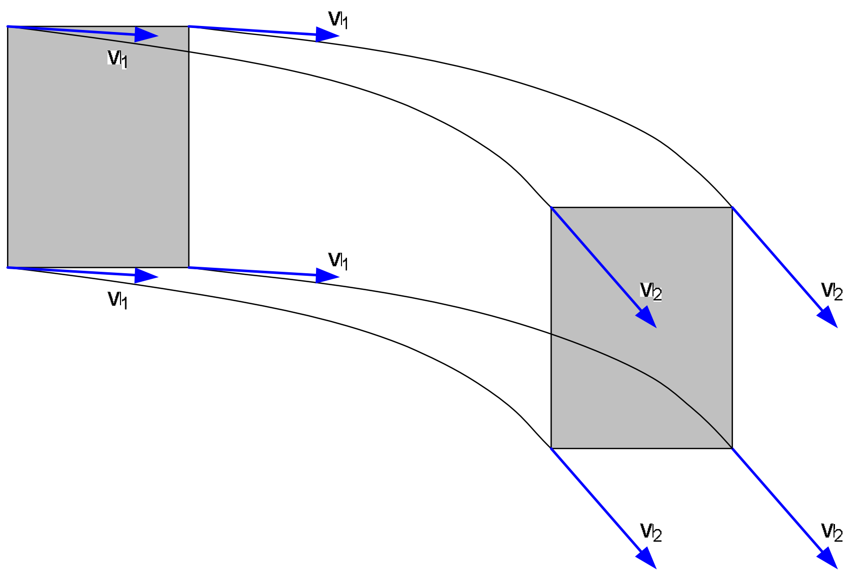
Při posuvném pohybu je každá přímka spojená s tělesem stále rovnoběžná se svou původní polohou. Všechny body tělesa opisují stejné trajektorie a v daném okamžiku mají všechny body stejnou rychlost (Obrázek 1)

Posuvný pohyb může být:

- Přímočarý nebo křivočarý
- Rovnoměrný nebo nerovnoměrný

Podstatné však je, že se při něm těleso neotáčí.

Posuvný pohyb koná například píst v motoru, bedna, kterou posouváme…



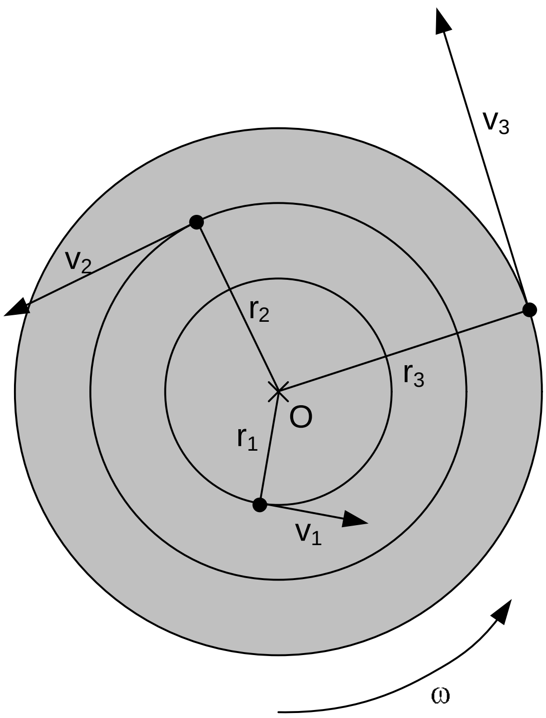
Obrázek 1 - Posuvný pohyb tuhého tělesa

6.2.2 Pohyb otáčivý

Při otáčivém pohybu mají všechna tělesa v daném okamžiku stejnou úhlovou rychlost.

V našem případě budeme sledovat pohyb (neboli otáčení) tuhého tělesa kolem pevné osy otáčení.

Při otáčení tuhého tělesa kolem nehybné osy opisují body tělesa kružnice, jejichž středy jsou v ose otáčení tělesa (Obrázek 2)



Obrázek 2 - Otáčivý pohyb tuhého tělesa

Úhlová rychlost ω je pro všechny body stejná. Velikosti rychlostí jednotlivých bodů jsou přímo úměrné jejich vzdálenostem od osy otáčení. To znamená, že jsou úměrný poloměrům kružnic, po nichž se otáčejí.

Otáčivý pohyb koná například kotouč brusky, vrtule ventilátoru …

6.2.3 Pohyb složený

Je to pohyb, kdy těleso koná současně pohyb posuvný i otáčivý. Takovým pohybem je například pohyb planet (otáčí se kolem slunce a ještě kolem své vlastní osy), letící disk, který rotuje….

Příklad:

Uveďte příklady posuvného pohybu.

Příklad:

Znázorněte posuvný pohyb tělesa, při němž jednotlivé body tělesa opisují kružnice.

Příklad:

Uveďte příklady těles, která se otáčejí kolem nehybné osy.

Příklad:

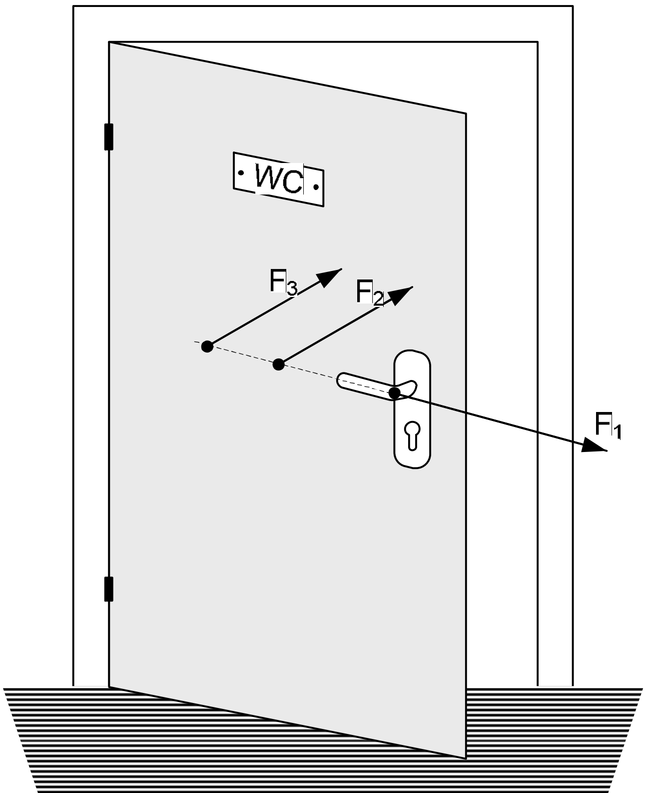
Uveďte příklad pohybu složeného z posuvného pohybu a *pohybu otáčivého.*

6.3 Moment síly vzhledem k ose otáčení

Uvažujeme těleso, které je otáčivé kolem své nehybné osy. Chceme – li takovéto těleso roztočit, musíme na něj působit silou. Budeme uvažovat jen případy, kdy je působící síla kolmá k ose otáčení.

Otáčivý účinek síly závisí na velikosti síly, na jejím směru a na poloze jejího působiště.

Tuto skutečnost si můžeme snadno ověřit (Obrázek 3)



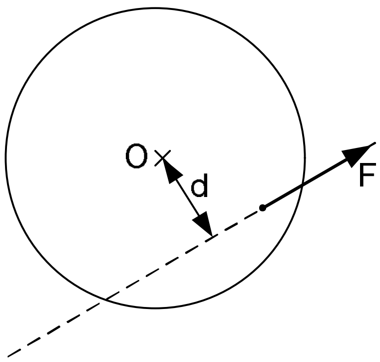
Obrázek 3 - Otáčivý účinek síly závisí na poloze síly vzhledem k ose otáčení

Síly $F_1, F_2 \, a \, F_3$ mají stejnou velikost a jsou kolmé k ose otáčení. Působením síly F_1 se dveře nepohnou. Síly $F_2 \, a \, F_3$, které jsou k rovině dveří kolmé, uvedou dveře do otáčivého pohybu. Snadno však zjistíme, že otáčivý účinek síly F_2, která působí dále od osy otáčení, je větší než otáčivý účinek síly F_3, jejíž působiště je blíže.

Fyzikální veličina vyjadřující otáčivý účinek síly se nazývá moment síly vzhledem k ose otáčení.

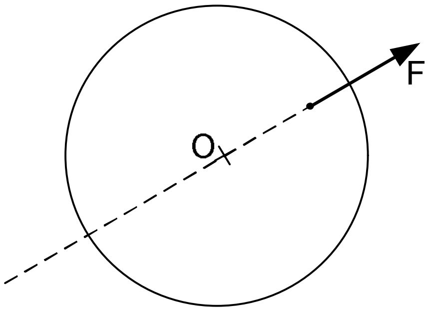
Moment síly $\boldsymbol{M}$ je vektorová fyzikální veličina. Velikost momentu síly je rovna součinu velikosti síly $\boldsymbol{F}$ a kolmé vzdálenosti $\boldsymbol{d}$ vektorové přímky síly od osy otáčení.(Obrázek 4) $M = F \cdot d$

Vzdálenost ***d*** se nazývá ***rameno síly.*** Jednotkou momentu síly je [N·m]



Obrázek 4 - Rameno d síly F vzhledem k ose o

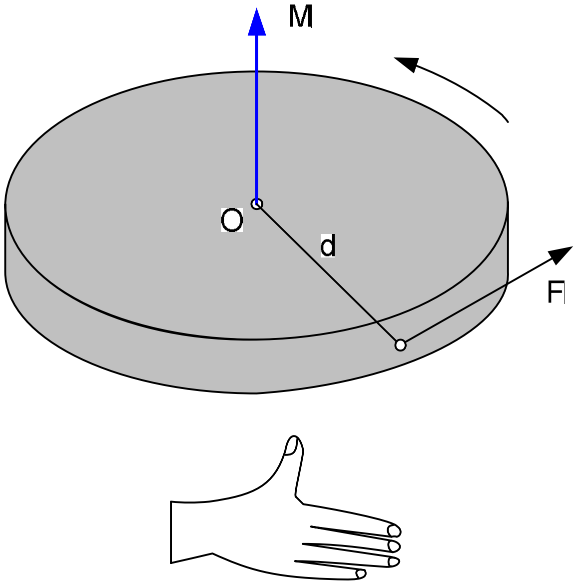
Otáčivý účinek síly je při konstantní velikosti síly tím větší, čím větší je rameno síly. Je – li rameno síly nulové, tj. protíná – li vektorová přímka síly osu otáčení (Obrázek 5), je moment síly nulový – síla nemá otáčivý účinek.



Obrázek 5 - Síla nemá otáčivý účinek, prochází - li vektorová přímka síly osou otáčení

Moment síly ***M*** je vektor, který leží v ose otáčení, je tedy kolmý k síle i k ramenu síly. Směr momentu síly určíme pomocí ***pravidla pravé ruky***.

Položíme – li pravou ruku na těleso tak, aby prsty ukazovaly směr otáčení tělesa, pak vztyčený palec ukazuje směr momentu síly (Obrázek 6)



Obrázek 6 - Směr vektoru síly určíme podle pravidla pravé ruky

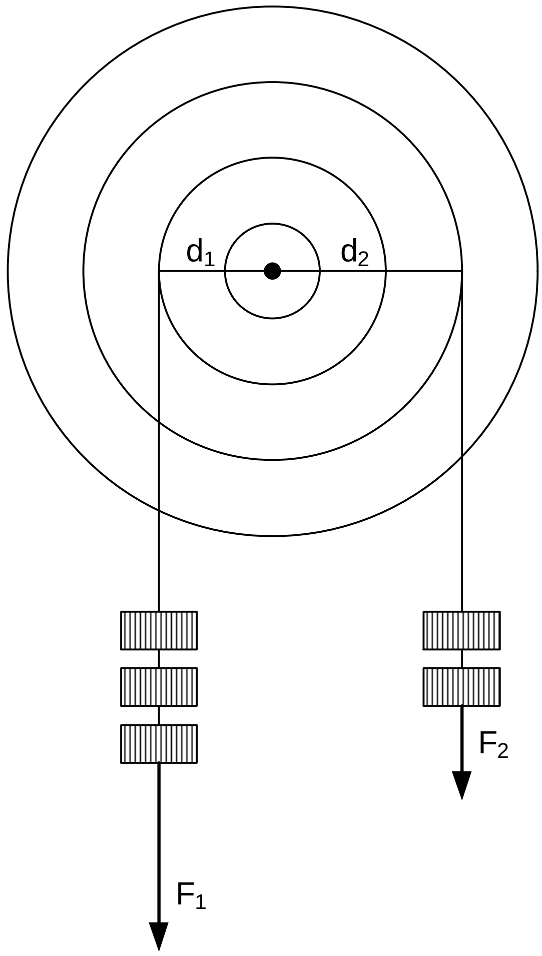
Na těleso otáčivé kolem pevné osy může působit více sil. Jejich celkový otáčivý účinek je určen výsledným momentem sil.

Výsledný moment sil ***M*** je vektorový součet momentů jednotlivých sil vzhledem k dané ose, tedy: $M = M_1 + M_2 + ... + M_n$

Momenty sil $M_1, M_2, ... M_n$ leží v ose otáčení, mohou však mít různý směr. Ve zvláštním případě se otáčivé účinky sil navzájem ruší. ***Platí momentová věta:***

Otáčivé účinky sil působících na tuhé těleso otáčivé kolem nehybné osy se navzájem ruší, je – li vektorový součet momentů všech sil vzhledem k ose otáčení nulový: $M = M_1 + M_2 + ... + M_n = 0$

Platnost momentové věty ověříme pokusem na momentovém kotouči (Obrázek 7).



Obrázek 7 - Ověření momentové věty pokusem

Síla F_1 působí ve vzdálenosti d_1 od osy otáčení, moment M_1 této síly leží v ose otáčení, má velikost $M_1 = F_1 \cdot d_1$ a směřuje dopředu. Síla F_2 působí ve vzdálenosti d_2 od osy otáčení, moment M_2 této síly má velikost $M_2 = F_2 \cdot d_2$, leží rovněž v ose otáčení, ale směřuje dozadu. Oba momenty leží na téže přímce a mají navzájem opačný směr. Otáčivý účinek sil se ruší, je – li vektorový součet momentů nulový, $M = M_1 + M_2$ neboli $M_1 = -M_2$. Odtud je zřejmé, že velikosti obou momentů musí být stejné, musí platit $M_1 = M_2$ neboli $F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2$

Příklad:

Změní se moment síly vzhledem k ose otáčení, posuneme – li, působiště síly do jiného bodu její vektorové přímky? Odpověď zdůvodněte.

Příklad:

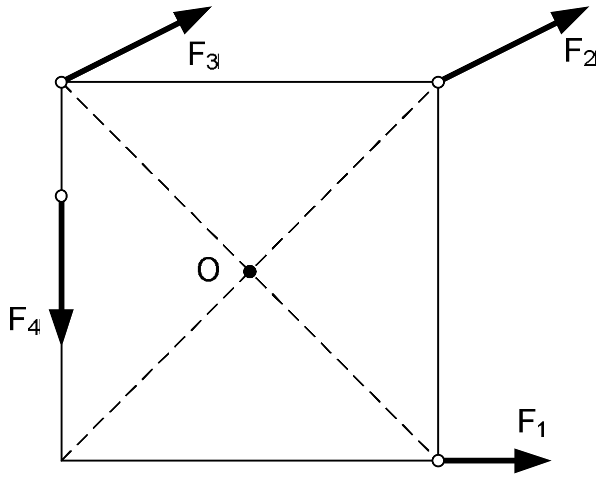
Změní se moment síly vzhledem k ose otáčení, změní li se směr síly? Odpověď zdůvodněte.

Příklad:

Čtvercová deska o straně 1 m je otáčiví kolem osy jdoucí jejím středem a kolmé k rovině desky. Na desku působí síly F_1, F_2, F_3 *a* F_4 *podle Obrázek 8. Všechny síly leží v rovině desky a mají stejnou velikost 20 N.*

a.) Vypočítejte velikosti momentů jednotlivých sil vzhledem k ose otáčení

b.) Určete velikost a smě výsledného momentu sil působícího na desku



Obrázek 8 - K příkladu

[$M_1 = 10\,Nm, M_2 = 0\,Nm, M_3 = 14\,Nm, M_4 = 10\,Nm, M = 6\,Nm$*, M je kolmý k nákresně a směřuje před nákresnu]*

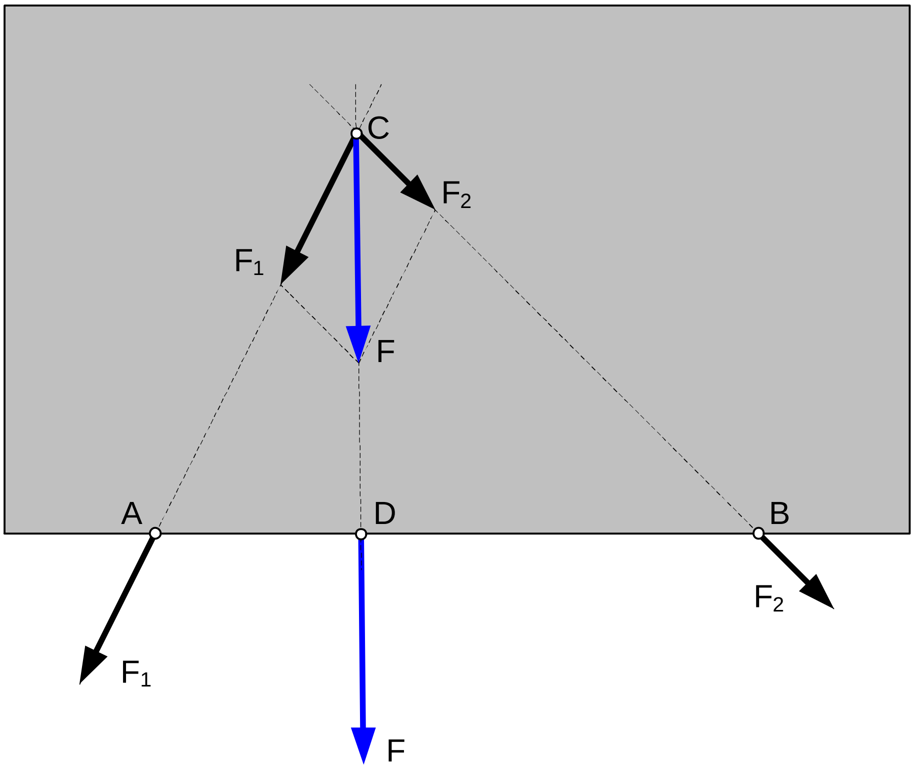
6.4 Skládání sil

Skládat síly působící na tuhé těleso znamená nahradit tyto síly jedinou silou, která má na těleso stejné účinky jako skládané síly.

Tato síla se nazývá ***výslednice sil.*** Výslednice ***F*** je určena svou velikostí, směrem a polohou působiště.

Velikost a směr výslednice jsou dány vektorovým součtem jednotlivých sil: $F = F_1 + F_2 + ... + F_n$

Síly působící v jednom bodě tělesa složíme pomocí vektorového rovnoběžníku stejně jako síly působící na hmotný bod. Působiště výslednice je pak ve společném působišti skládaných sil. (Obrázek 9)



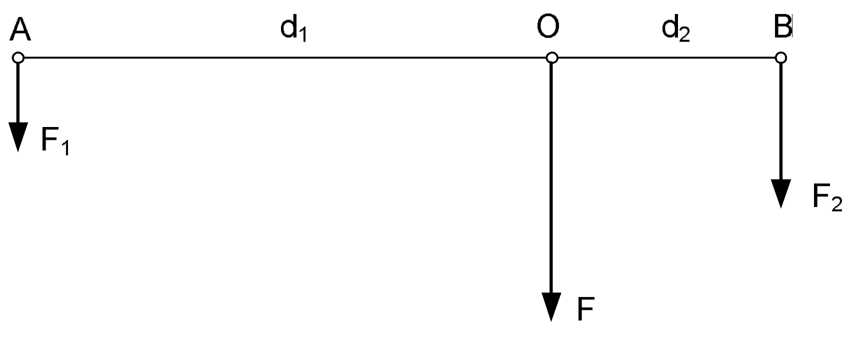
Obrázek 9 - Skládání dvou různoběžných sil

Podobně postupujeme při skládání libovolného počtu různoběžných sil. Aby měla výslednice sil stejné otáčivé účinky jako skládané síly, musí se moment výslednice vzhledem k libovolné ose rovnat součtu momentů skládaných sil vzhledem k téže ose: $M = M_1 + M_2 + ... + M_n$.

Tohoto poznatku využijeme při hledání ***výslednice rovnoběžných sil*** působících na tuhé těleso.

Působí – li na těleso dvě rovnoběžné síly $F_1\,a\,F_2$ stejného směru (Obrázek 10) je velikost jejich výslednice ***F*** rovna součtu velikostí obou sil $F = F_1 + F_2$. Polohu působiště O výslednice najdeme pomocí momentů sil. Moment výslednice vzhledem k ose jdoucí jejím působištěm je nulový. Otáčivé účinky obou sil se navzájem ruší, momenty $M_1\,a\,M_2$ mají stejnou velikost, ale navzájem opačný směr. Pro velikost momentů sil platí $M_1 = M_2$, podle (Obrázek 10) je tedy $F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2$.

Výslednice dvou rovnoběžných sil stejného směru má stejný směr jako obě skládané síly, její velikost je rovna součtu velikosti obou sil. Působiště výslednice dělí vzdálenost působišť obou sil v obráceném poměru velikosti skládaných sil, tj. $\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}$

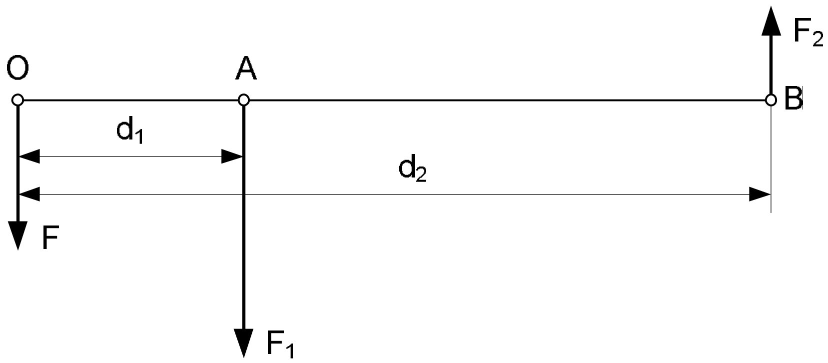


Obrázek 10 - Skládání dvou rovnoběžných sil stejného směru

Podobně postupujeme při skládání rovnoběžných sil opačného směru (Obrázek 11).

Velikost výslednice sil je rovna rozdílu velikostí obou sil, $F = |F_1 - F_2|$, a má směr shodný se směrem větší ze skládaných sil.

Moment výslednice vzhledem k ose jdoucí jejím působištěm O je nulový, součet momentů skládaných sil k téže ose je tedy také nulový. Platí tedy opět že, $M = M_1 + M_2 = 0$ a pro velikosti momentů platí $M_1 = M_2$ a podle Obrázek 11 je $F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2$. Působiště výslednice je na prodloužené spojnici působišť obou sil blíže k větší síle.



Obrázek 11 - Skládání dvou rovnoběžných sil opačného směru

Příklad:

Najděte velikost a působiště výslednice dvou rovnoběžných sil o velikostech 40N a 60N, je – li vzájemná vzdálenost jejich působišť 2m. Síly jsou

c.) Stejného směru

d.) Opačného směru

[a.) 100 N, 0,8 m od větší síly, b.) 20N, 4m od větší síly]

Příklad:

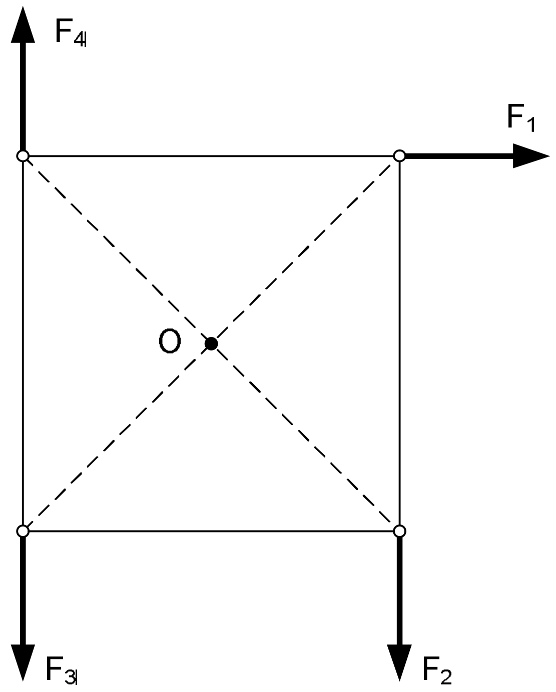
Čtvercová deska o straně 2m je otáčivá kolem osy jdoucí jejím středem a kolmé k rovině desky. Na desku působí síly F_1, F_2, F_3, F_4 *podle Obrázek 12. Velikost každé síly je 10N. Vypočtěte:*

a.) velikost výslednice sil F_1 a F_2

b.) velikost výslednice sil F_2 a F_3

c.) velikost výslednice sil F_3 a F_4

d.) velikost výslednice všech čtyř sil



Obrázek 12 - K příkladu

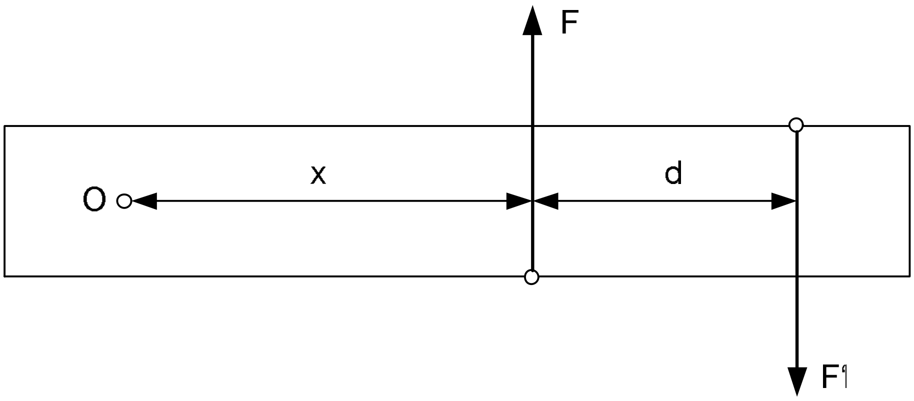
[a.) 14N, b.) 20N, c.) 0N, d.) 14N]

6.5 Dvojice sil

Zvláštním případem rovnoběžných sil opačného směru je ***dvojice sil***. Jsou to dvě stejně velké síly opačného směru, na **Chyba! Nenalezen zdroj odkazů.** označené jako F, F'.

Výslednice sil je nulová, tzn., že nemůžeme tyto síly nahradit jedinou silou. Dvojice sil tedy nemá výslednici. Má na těleso pouze otáčivý účinek.

Otáčivý účinek dvojice sil je vyjádřen momentem ***D*** dvojice sil.



Obrázek 13 - Dvojice sil

Určíme moment ***D*** dvojice sil, znázorněné na (Obrázek 13), vzhledem k ose kolmé k rovině, v níž leží síly. Osa prochází bodem *O*. Vzájemnou vzdálenost vektorových přímek sil označíme *d*. Tato vzdálenost se nazývá ***rameno dvojice sil.***

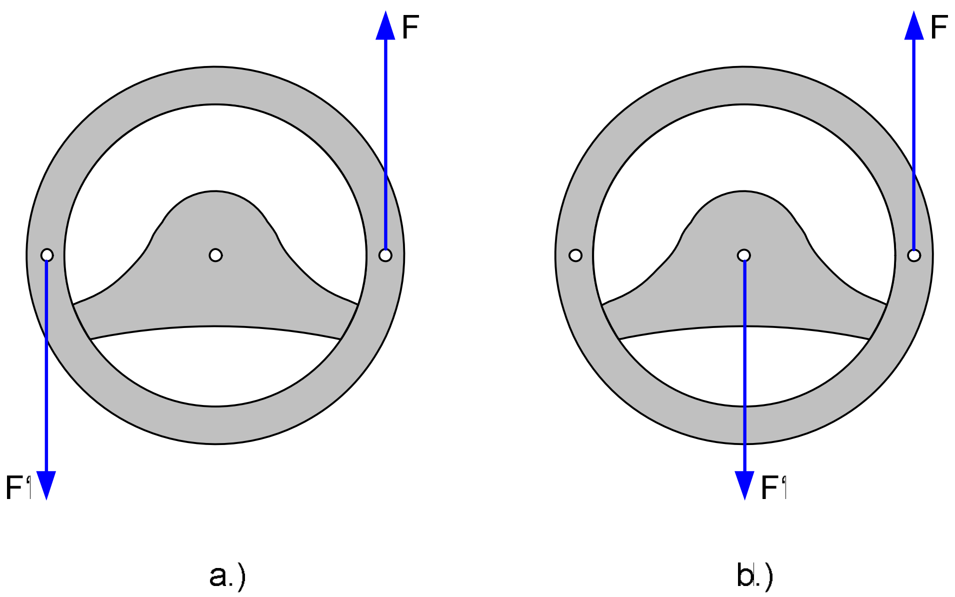
Označme *x* vzdálenost vektorové přímky síly ***F*** od osy. Podle (Obrázek 13) je velikost momentu ***M*** síly ***F*** vzhledem k dané ose $M = F \cdot x$, moment ***M*** směřuje před nákresnu. Velikost momentu ***M'*** síly ***F'*** vzhledem k téže ose je $M' = F'(x + d)$, moment ***M'*** směřuje za nákresnu. Momenty ***M*** a ***M'*** leží v téže přímce a mají navzájem opačný směr. Výsledný moment, tedy moment dvojice sil, je dán vektorovým součtem momentů sil, tedy $D = M + M'$. Velikost výsledného momentu je $D = M' - M = F'(x + d) - Fx = F'x + F'd - Fx$. Obě síly jsou stejně velké, je tedy ***F*** a ***F'*** a velikost momentu dvojice sil je $D = F \cdot d$. Moment ***D*** směřuje za nákresnu. Pro moment dvojice sil platí:

Velikost momentu dvojice sil je rovna součinu velikosti jedné síly a ramena dvojice $D = F \cdot d$

Moment $\boldsymbol{D}$ dvojice sil je kolmý k rovině, v níž leží síly, a jeho směr určíme pomocí pravidla pravé ruky.

Moment dvojce sil nezávisí na vzdálenosti sil od osy.

S dvojicí sil se setkáváme vždy, když je těleso uváděno do otáčivého pohybu. Dvojice sil působí například při utahování šroubů, při otáčení kol pracovních strojů, při otáčení volantem motorového vozidla.



Obrázek 14 - Dvojice sil působících na volant automobilu při otáčení volantem

Otáčí – li řidič volantem oběma rukama, působí obě síly na obvodu volantu (Obrázek 14a). Dvojice sil však působí na volant i tehdy, pokud s ním otáčí řidič pouze jednou rukou (Obrázek 14b)

Ruka spolu s volantem působí silou na pevný čep volantu. Reakcí k této síle je stejně velká síla opačného směru, kterou působí čep na volant. Na volant tedy působí dvojice sil: Jednou silou působí řidič na obvodu volantu, druhou čep ve středu volantu. Při stejně velkých silách je však nyní moment dvojice sil, a tedy její účinek na volant poloviční.

Příklad:

Uveďte příklady působení dvojice sil na tuhé těleso.

Příklad:

Najděte velikost a směr momentu dvojice sil F_2 *a* F_4 *nakreslených na (Obrázek 12)*

Příklad:

Zámečník vyřezává závit pomocí vratidla o délce 30 cm, přičemž na obou koncích vratidla působí silami o velikosti 40 N. Jak velkými silami by musel působit na koncích vratidla o délce 20 cm, aby dosáhl stejného účinku?

[60 N]

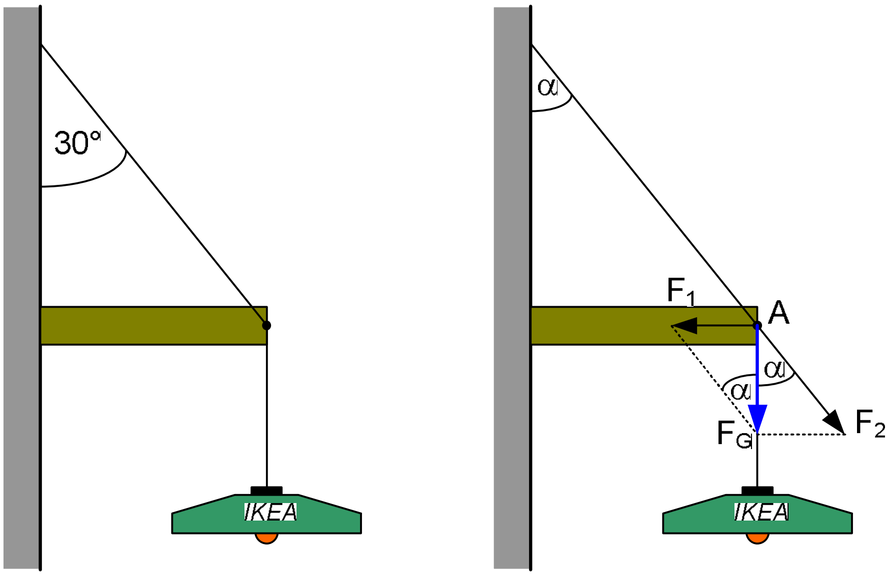
6.6 Rozkládání sil

Rozložit sílu na složky znamená nahradit ji dvěma nebo více silami, jejichž účinek na těleso je stejný jako účinek dané síly. Při rozkládání sil na složky platí stejná pravidla jako při skládání sil.

Rozkládáme – li sílu na různoběžné složky, volíme zpravidla směry, do nichž chceme sílu rozložit a určujeme velikosti složek.

Příklad:

Lampa o hmotnosti 2,0 kg je zavěšena na svislé stěně pomocí vodorovného trámu a šikmého drátu., který svírá se stěnou úhel 30°. (Obrázek 15). Určete síly, kterými lampa působí na trám a na drát.



Obrázek 15 - K řešenému příkladu

Řešení:

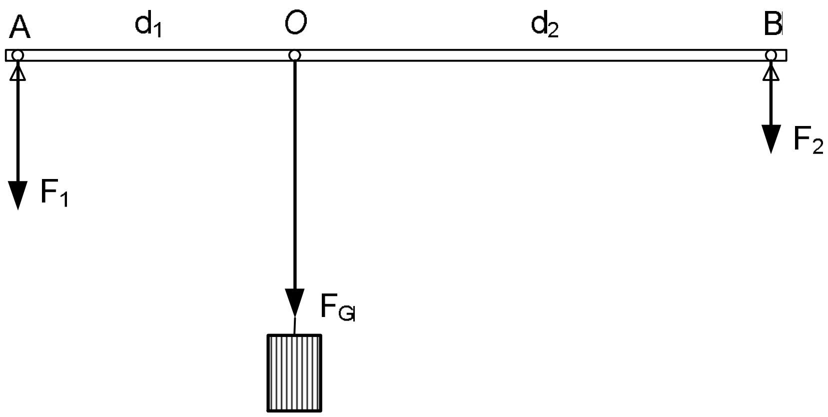
$M = 2{,}0\ kg$, $g = 10\ m/s^2$, $\alpha = 30°$, $F_2 = ?\ N$

Tíhovou sálu F_G působící na lampu přeneseme do bodu A, v němž je upevněn závěs lampy (Obrázek 15). Tíhovou sílu rozložíme na dvě různoběžné složky do směrů daných trámem a drátem. Síla F_1 působí tlakem na trám. Síla F_2 působí tahem na drát. Podle (Obrázek 15) platí pro velikost sil $F_1 / F_G = tg\alpha$ a $F_G / F_2 = \cos\alpha$. Dosadíme – li za $F_G = mg$ dostaneme vztahy: $F_1 = m \cdot g \cdot tg\alpha$ a $F_2 = \dfrac{m \cdot g}{\cos\alpha}$. Pro dané hodnoty je F1 = 12N a F2

= 23N

Příklad:

Dva muži nesou břemeno o hmotnosti 90 kg zavěšené na tyči o zanedbatelně malé hmotnosti. (Obrázek 16). První z nich opírá tyč o rameno ve vzdálenosti 0,6 m od závěsného bodu břemena, druhý ve vzdálenosti 0,9 m. Jak velkou silou tyč na každého z nich působí?



Obrázek 16 - K řešenému příkladu

Řešení:

m=90 kg; g=10 m/s2; d_1=0,6 m; d_2=0,9 m; F_1=?N; F_2=?N

Na břemeno působí tíhová síla F_G. Tuto sílu přeneseme do bodu O, v němž je upevněn závěs břemene, a rozložíme na dvě rovnoběžné složky, v nichž F_1 působí na prvního muže v bodě A, F_2 působí na druhého muže v bodě B. Pro velikosti složek platí vztah $F_1 + F_2 = F_G$. Moment síly F_G vzhledem k ose jdoucí k ose bodem O je nulový, součet momentů složek vzhledem k téže ose musí být tedy rovněž nulový $M_1 + M_2 = 0$. Momenty M_1 a M_2 mají stejnou velikost a opačný směr. Platí tedy $M_1 = M_2$ neboli $F_1 d_1 = F_2 d_2$. Do této rovnice dosadíme $F_2 = F_G - F_1$ a dostaneme rovnici $F_1 d_1 = (F_G - F_1) d_2$. Odtud po úpravě máme pro velikost síly F_1 vztah: $F_1 = \dfrac{F_G d_2}{d_1 + d_2}$.

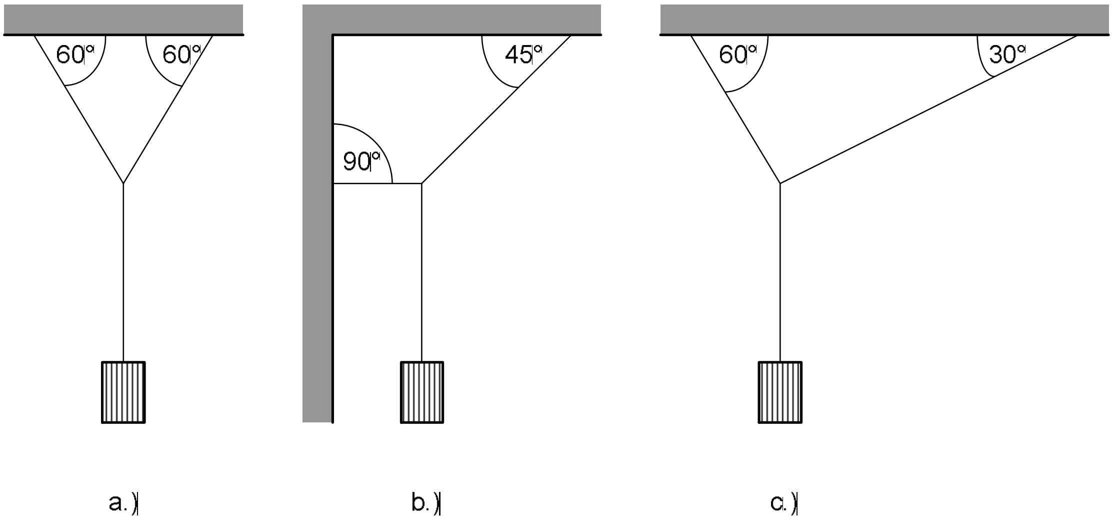
Velikost síly F_2 je $F_2 = F_G - F_1 = F_G - \dfrac{F_G d_2}{d_1 + d_2}$.

Po úpravě je velikost síly dána: $F_2 = \dfrac{F_G d_1}{d_1 + d_2}$

Tyč působí na prvního muže silou F1 o velikosti 540N, na druhého silou F2 o velikosti 360N.

<u>Příklad:</u>

Vypočtěte velikosti sil působících na každé lano, je – li těleso o hmotnosti 100 kg zavěšeno (Obrázek 17)



Obrázek 17 - K úloze

$$[a.)\ F_1 = F_2 = mg\frac{\sqrt{3}}{3} = 580N\ ;\ b.)\ F_1 = mg = 1000N, F_2 = mg\sqrt{2} = 1400N$$

$$c.)\ F_1 mg\frac{\sqrt{3}}{2} = 870N, F_2 = \frac{mg}{2}500N\ ]$$

<u>Příklad:</u>

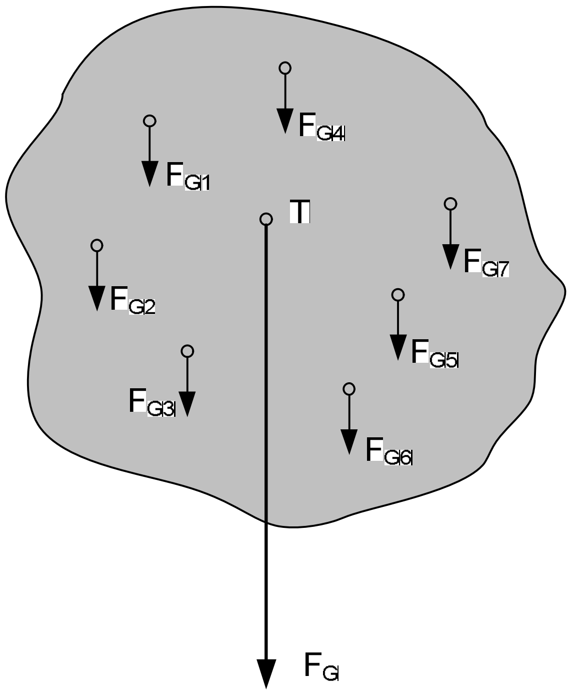
Tyč o délce 1 m a zanedbatelně malé hmotnosti je podepřena na obou koncích. Na tyč zavěsíme těleso o hmotnosti 20 kg. Kam je třeba umístit závěs tělesa, aby na pravou podpěru působila síla o velikosti 160 N? Jak velká síla působí na levou podpěru?

[Do vzdálenosti 0,2 m od pravé podpěry, 40 N]

6.7 Těžiště tuhého tělesa

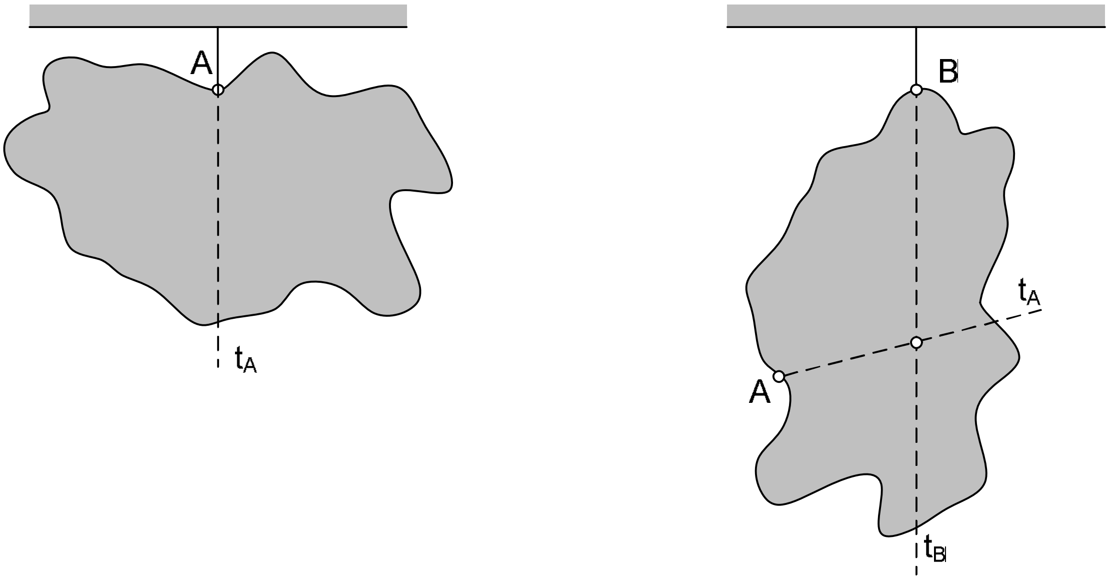
Tuhé těleso si představujeme složené z velkého počtu hmotných bodů, jejichž vzájemné polohy se mění. V homogenním tíhovém poli působí na jednotlivé body tělesa tíhové síly, které jsou navzájem rovnoběžné. Jejich složením dostaneme výslednou tíhovou sílu F_G působící na těleso. Tíhová síla má působiště v bodě T, který se nazývá ***těžiště tělesa***. (Obrázek 18)

Těžiště tuhého tělesa je působiště tíhové síly působící na těleso v homogenním tíhovém poli.



Obrázek 18 - Působiště tělesa je působiště výsledné tíhové síly

Těleso tvaru nepravidelné desky zavěšujeme v různých bodech na obvodu desky (Obrázek 19). Při každém zavěšení se těleso ustálí tak, že těžiště je pod bodem závěsu. Přímka spojující bod závěsu a těžiště se nazývá těžnice. Těžiště T je průsečíkem všech těžnic.



Obrázek 19 - Těžiště je průsečíkem těžnic

Poloha těžiště je dána rozložením látky v tělese. Těžiště stejnorodých těles, která mají ***střed souměrnosti***, je v tomto středu. Těžiště stejnorodé koule, krychle, kvádru nebo válce je v jejich geometrickém středu. Jestliže má stejnorodé těleso ***osu souměrnosti***, je těžiště na této ose. Například těžiště rotačního kužele je na jeho rotační ose.

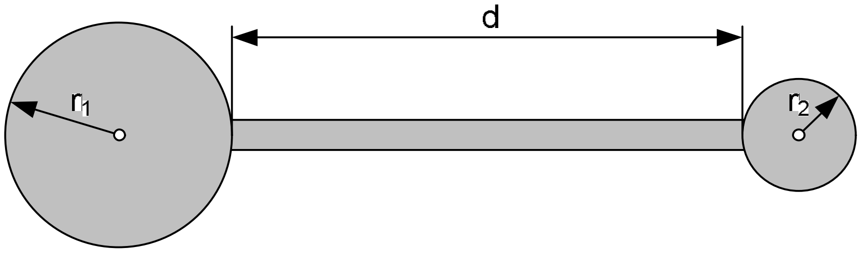
U stejnorodých těles, která mají ***rovinu souměrnosti***, je těžiště v této rovině.

Těžiště tělesa může být i mimo látku tělesa. Tak je tomu například u dutých těles, jako je dutá koule, krychle atd. Mimo látku tělesa je také těžiště drátu, který je ohnutý do tvaru podkovy.

Polohu těžiště nestejnorodých těles nebo geometricky nepravidelných těles určujeme zpravidla experimentálně. U pravidelných těles můžeme určit polohu těžiště výpočtem.

Příklad:

Určete polohu těžiště tělesa znázorněného na (Obrázek 20). Těleso se skládá z tyče o délce 50 cm a hmotnosti 4 kg, na jejichž koncích jsou upevněny koule. První koule má poloměr 10 cm a hmotnost 24 kg. Druhá koule má poloměr 8 cm a hmotnost 12 kg. Všechny části tělesa jsou stejnorodé.

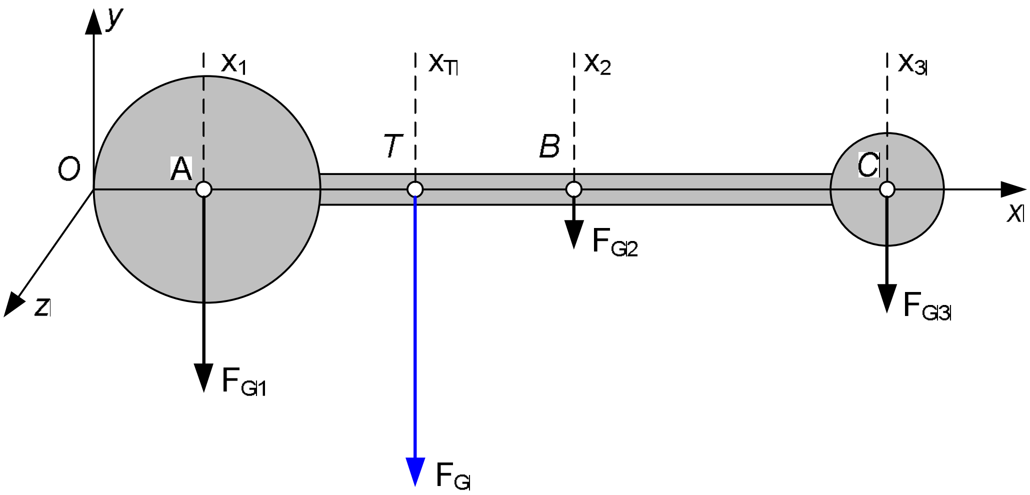


Obrázek 20 - K zadání příkladu

Řešení:

m1 = 24 kg; r1 = 0,10 m; m2 = 4 kg; r2 = 0,08 m; d = 0,50 m; m3 = 12 kg;

Těleso má osu souměrnosti, těžiště tedey leží na této ose. Zvolíme soustavu souřadnic podle (Obrázek 21) tak, aby osa souměrnosti byla totožná s osou x. Na první kouli působí tíhová síla $F_{G1} = m_1 g$. *Působiště této síly je ve středu koule v bodě A. o souřadnici* $x_1 = r_1 = 0{,}1\,m$. *Na tyč působí tíhová síla o velikosti* $F_{G2} = m_2 g$. *Působiště této síly je ve středu tyče v bodě B, jehož souřadnice* $x_2 = 2r_1 + d/2 = 0{,}45m$. *Na druhou kouli působí tíhová síly* $F_{G3} = m_3 g$ *s působištěm v bodě C, který má souřadnici* $x_3 = 2r_1 + d + r_2 = 0{,}78\,m$. *Výslednice těchto tří sil má působiště v těžišti těles.*



Obrázek 21 - Řešení příkladu v soustavě souřadnic

Velikost výslednice tíhové síly je $F_G = F_{G1} + F_{G2} + F_{G3} = m_1 g + m_2 g + m_3 g$. *Polohu působiště výsledné tíhové síly neboli polohu těžiště T tělesa, zjistíme pomocí momentů sil. Momenty sil budeme vztahovat k ose z. Momenty výsledné tíhové síly vzhledem k ose z musí být rovný součinu momentů jednotlivých tíhových sil vzhledem k téže ose.*

Momenty všech tíhových sil mají v tomto případě stejný směr. Označíme – li x_T *souřadnici těžiště, zapíšeme rovnost momentů vztahem:* $x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$.

Pro dané hodnoty je xT = 0,34 m. Poloha těžiště a výsledná tíhová síla jsou nakresleny na (…).

Těžiště tělesa má souřadnici xT = 0,34 m, je tedy ve vzdálenosti 0,11 m vlevo od středu tyče.

Uvedeným způsobem můžeme vypočítat polohu těžiště tělesa složeného z libovolného počtu těles. Jsou – li těžiště jednotlivých těles rozložena v rovině nebo v prostoru, musíme vypočítat ještě další souřadnice těžiště y_T a z_T

Příklad:

Uveďte příklady těles, u nichž je těžiště v geometrickém středu tělesa.

Příklad:

Uveďte příklady těles, u nichž je těžiště mimo látku tělesa.

Příklad:

Vypočtěte polohu těžiště tělesa uvedeného v řešeném příkladu tak, že zvolíte počátek souřadnic

- *Ve středu první koule*
- *Ve středu tyče*

Příklad:

Na konci tyče o délce 0,6 m je připevněna koule o poloměru 0,1 m, jejíž střed leží na ose tyče. Obě tělesa jsou stejnorodá a mají stejnou hmotnost. Určete polohu těžiště tohoto útvaru.

[Těžiště je ve vzdálenosti 0.2 m od středu koule]

Příklad:

Určete polohu těžiště tyče o délce 0,2 m, jejíž jedna polovina je z mědi a druhá z hliníku. Hustoty mědi a hliníku najdete v MFCht.

[Těžiště je v měděné části tyče ve vzdálenosti 7,3 cm od jejího konce]

6.8 Rovnovážná poloha tuhého tělesa

Zavěšené nebo podepřené těleso je v rovnovážné poloze, jestliže svislá těžnice prochází bodem závěsu nebo podpěrným bodem a těleso je v klidu.

U tělesa, které je v rovnovážné poloze, jsou splněny podmínky rovnováhy.

Těleso se nepohybuje, což znamená, že výslednice ***F*** všech sil, které na těleso působí je nulová. Tuto silovou rovnováhu vyjadřuje rovnice:

$$F = F_1 + F_2 + \ldots + F_n = 0$$

Protože se těleso neotáčí, je také výsledný moment sil působících na těleso nulový. Tuto momentovou rovnováhu vyjadřuje rovnice:

$$M = M_1 + M_2 + \ldots + M_n = 0$$

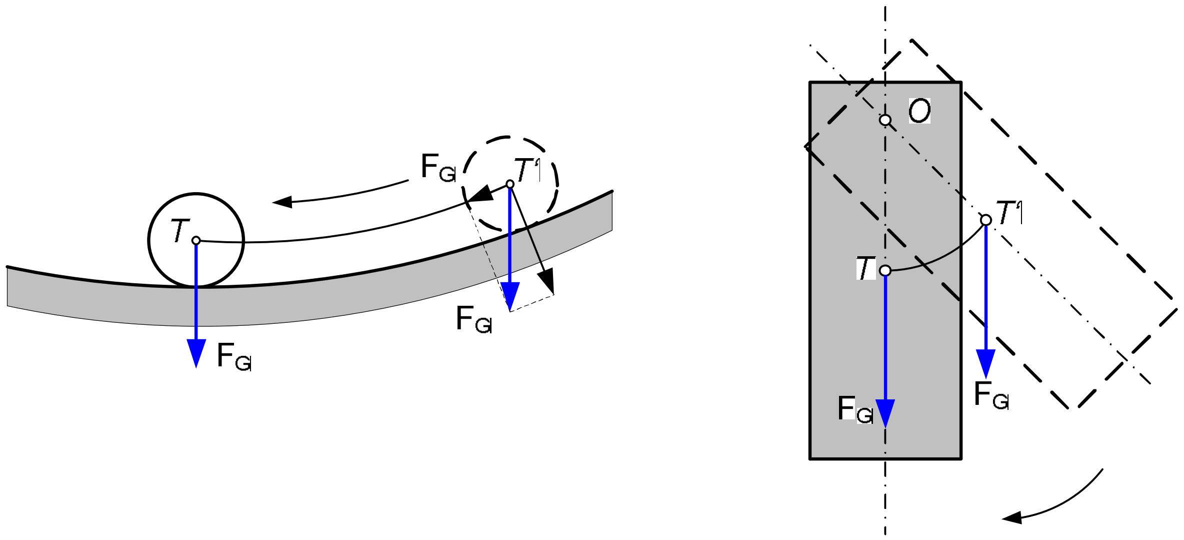
Tuhé těleso je v rovnovážné poloze, jestliže je vektorový součet všech sil, které na ně působí, i vektorový součet všech momentů těchto sil rovných nule.

Jestliže těleso poněkud vychýlíme z rovnovážné polohy, změní se rozložení sil působících na těleso a podmínky rovnováhy již nemusí být splněny. Mohou nastat tři různé případy:

- Stálá rovnovážná poloha
- Vratká rovnovážná poloha
- Volná rovnovážná poloha

6.8.1 Stálá (stabilní) rovnovážná poloha

Mají ji tělesa, které se po vychýlení vrací zpět do rovnovážné polohy



Obrázek 22 - Stálá (stabilní) rovnovážná poloha tělesa

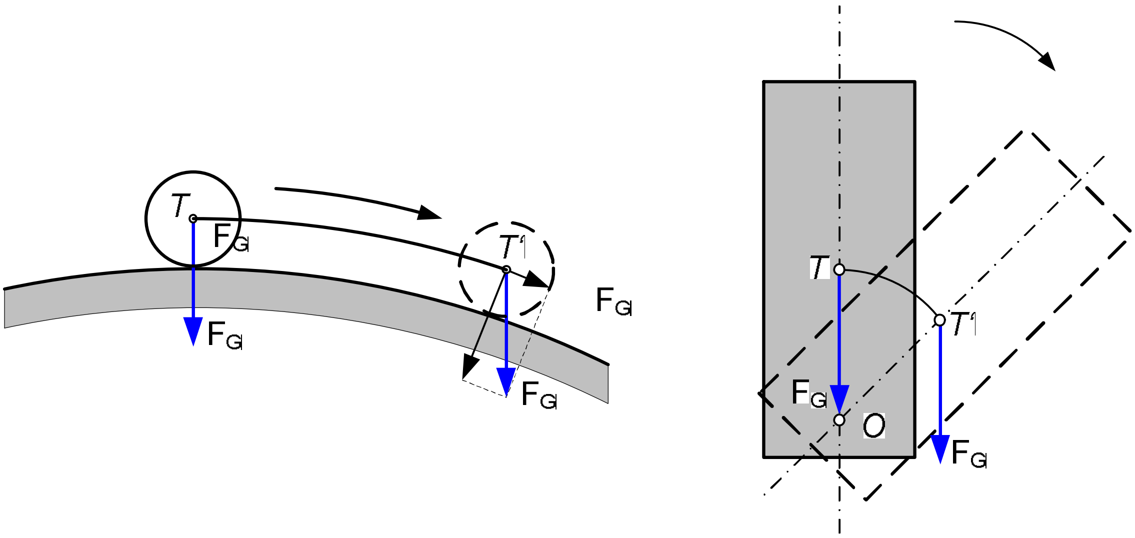
Při vychýlení kuličky z rovnovážné polohy působí na kuličku složka tíhové síly, směřující do rovnovážné polohy. Na těleso otáčivé kolem osy, působí moment tíhové síly, který je otáčí zpět do rovnovážné polohy.

Důležité je, všimnout si, že oři vychýlení tělesa z rovnovážné polohy se výška jeho těžiště zvětšuje a tedy jeho potenciální energie roste.

Ve stálé rovnovážné poloze je těžiště tělesa v nejnižší poloze a jeho potenciální energie je proto nejmenší.

6.8.2 Vratká (labilní) rovnovážná poloha

Mají ji tělesa, u kterých se po vychýlení z rovnovážné polohy výchylka zvětšuje a těleso se samo do rovnovážné polohy nevrátí.



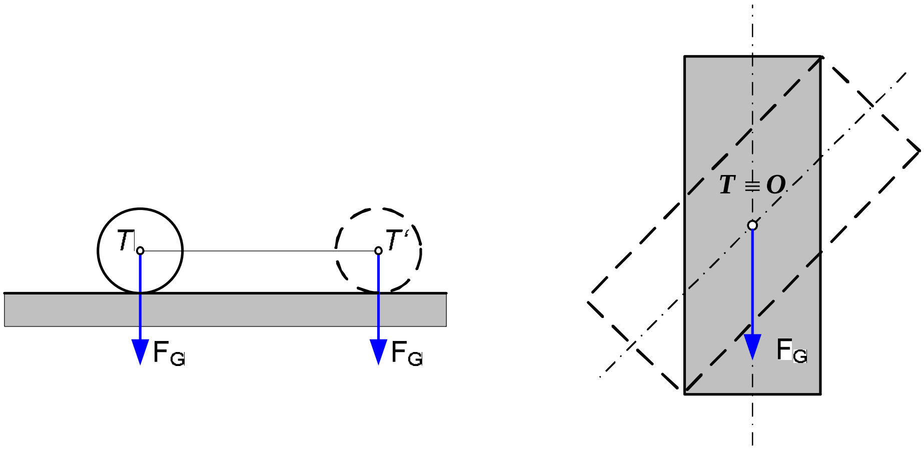
Obrázek 23 - Vratká (labilní) rovnovážná poloha

Při vychýlení tělesa z vratké rovnovážné polohy se vlivem působení tíhové síly výchylka zvyšuje. U kuličky na misce směřuje složka tíhové síly od rovnovážné polohy, u tělesa otáčivého kolem osy způsobuje moment tíhové síly zvětšování výchylky.

Ve vratké rovnovážné poloze je těžiště tělesa v největší výšce a jeho tíhová energie je největší.

6.8.3 Volná (indiferentní) poloha

Mají ji tělesa, která po vychýlení z rovnovážné polohy zůstává v nové rovnovážné poloze. Výchylka se nezvětšuje ani nezmenšuje – těleso je opět v rovnovážné poloze.



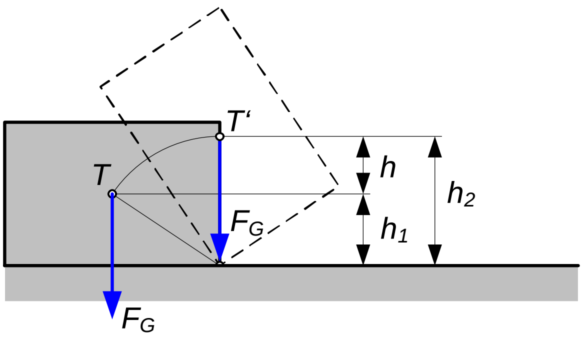
Obrázek 24 - Volná (indiferentní) rovnovážná poloha

Výška těžiště se při vychýlení tělesa z rovnovážné polohy nemění, a tudíž se nemění ani jeho tíhová potenciální energie.

6.8.4 Těleso podepřené na ploše

Je ve stálé rovnovážné poloze, jestliže svislá těžnice prochází podstavou tělesa. U těles podepřených na ploše má velký význam stabilita tělesa.

Uvažujme stejnorodý kvádr, který stojí na vodorovné podložce.



Obrázek 25 - Určení stability tělesa

Kvádr je v rovnovážné poloze a svislá těžnice podstavou kvádru. Otočíme – li kvádr kolem jedné hrany podstavy, pozorujeme při malých výchylkách, že se kvádr vrací zpět do původní polohy – je ve stálé rovnovážné poloze.

Jestliže výchylku zvětšíme tak, že těžiště kvádru je nad hranou podstavy a svislá těžnice prochází touto hranou, je kvádr ve vratké rovnovážné poloze. Při malém zvětšení výchylky se kvádr převrátí na jinou podstavu.

> Stabilitu tělesa určuje práce, kterou musíme vykonat, abychom těleso přemístili ze stálé rovnovážné polohy do polohy vratké.

U kvádru znázorněného na (Obrázek 25) se těžiště zvedlo z původní výšky h_1 do výšky h_2. Práce vykonaná při zvednutí těžiště kvádru o hmotnosti m o výšku $h = h_2 - h_1$ je rovna přírůstku potenciální energie kvádru:

$$W = m \cdot g \cdot (h_2 - h_1)$$

> Stabilita tělesa je tím větší, čím větší je hmotnost tělesa, čím níže je těžiště ve stálé rovnovážné poloze a čím větší je vzdálenost svislé těžnice od podstavné hrany.

Příklad:

Ukažte stálou, vratkou a volnou rovnovážnou polohu u rotačního kužele s válce.

Příklad:

Stejnorodý válec a stejnorodý kužel mají stejnou hmotnost, stejnou podstavu a stejnou výšku. Které těleso má větší stabilitu? Odpověď zdůvodněte.

Příklad:

Jakou práci musíme vykonat, abychom stejnorodou krychli o hraně 0,5 m a hmotnosti 900 kg překlopili kolem jedné hrany?

[0.9 kJ]

Příklad:

Dvě stejné bedny stojí na vodorovné podlaze. Jedna z beden je naplněna až po okraj pískem, ve druhé je do poloviny nasypán železný odpad. Hmotnosti beden s obsahem jsou stejné. Která bedna má větší stabilitu a proč?

Příklad:

Hliníkový a železný válec mají stejné rozměry a stojí na vodorovné podlaze. Který válec má větší stabilitu? Odpověď zdůvodněte.

6.9 Kinetická energie tuhého tělesa

Tuhé těleso může konat pohyb posuvný nebo pohyb otáčivý, popřípadě oba tyto pohyby současně.

6.9.1 Posuvný pohyb

Při posuvném pohybu opisují všechny body tělesa stejné trajektorie a v každém okamžiku mají stejnou rychlost ***v***. Kinetická energie tělesa je rovna součtu kinetických energií jednotlivých bodů:

$$E_K = \frac{1}{2}m_1 v^2 + \frac{1}{2}m_2 v^2 + \ldots + \frac{1}{2}m_n v^2$$

Vytkneme – li z tohoto součtu $\frac{1}{2}v^2$ dostaneme vztah:

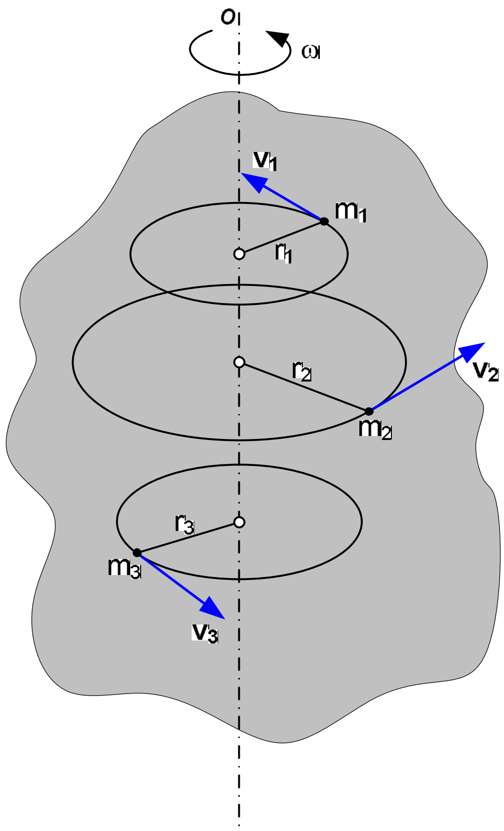
$$E_K = \frac{1}{2}v^2 \left(m_1 + m_2 + \ldots + m_n\right).$$

Protože $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m$ je celková hmotnost tělesa, je kinetická energie tělesa při posuvném pohybu dána vztahem: $E_K = \frac{1}{2}mv^2$

Kinetická energie tělesa o hmotnosti m, pohybujícího se posuvným pohybem rychlostí v, je rovná kinetické energii hmotného bodu se stejnou hmotností a stejnou rychlostí.

6.9.2 Otáčivý pohyb

Při otáčivém pohybu tuhého tělesa kolem nehybné osy opisují body tělesa kružnice, jejichž středy leží na ose otáčení (Obrázek 26). Úhlová rychlost w je pro všechny body stejná, rychlosti jednotlivých bodů jsou přímo úměrné poloměrům kružnic, po nichž se pohybují, tedy $v_1 = r_1\omega, v_2 = r_2\omega, ..., v_n = r_n\omega$



Obrázek 26 - K odvození vztahu pro kinetickou energii

Kinetickou energii E_K tělesa vypočteme opět jako součet kinetických energií jednotlivých bodů: $E_K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + ... + \frac{1}{2}m_nv_n^2$ po dosazení dostaneme vztah: $E_K = \frac{1}{2}m_1r_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2\omega^2 + ... + \frac{1}{2}m_nr_n^2\omega^2$.

Z tohoto výrazu vytkneme $\frac{1}{2}\omega^2$ a pro kinetickou energii dostáváme vztah:

$$E_K = \frac{1}{2}\omega^2\left(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + ... + m_nr_n^2\right).$$

Při otáčení tuhého tělesa kolem nehybné osy závisí jeho kinetická energie jednak na úhlové rychlosti otáčení, jednak na hmotnostech jednotlivých bodů a na jejich vzdálenostech od osy otáčení. Kinetická energie tělesa při otáčení tedy závisí na rozložení látky v tuhém tělese.

Fyzikální veličina, která vyjadřuje rozložení látky vzhledem k ose, je moment setrvačnosti ***J*** tuhého tělesa vzhledem k ose otáčení.

Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení je definován vztahem $J = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + \ldots + m_n \cdot r_n^2$

Jednotkou momentu setrvačnosti je $kg \cdot m^2$. Pomocí momentu setrvačnosti můžeme vyjádřit kinetickou energii otáčejícího se tělesa.

Kinetická energie tuhého tělesa otáčejícího se kolem nehybné osy úhlovou rychlosti ω je dána vztahem $E_K = \frac{1}{2} J\omega^2$ kde J je moment setrvačnosti tělesa vhledem k ose otáčení.

Příklad:

Na koncích tenké tyče o zanedbatelně malé hmotnosti a délce 0,8 m jsou upevněny kuličky o hmotnostech 0,3 kg a 0,1 kg. Tyč se otáčí kolem osy, kolmé k tyči, rychlostí 10 rad/s. Vypočtěte kinetickou energii soustavy, jestliže osa otáčení prochází:

a.) Těžištěm soustavy

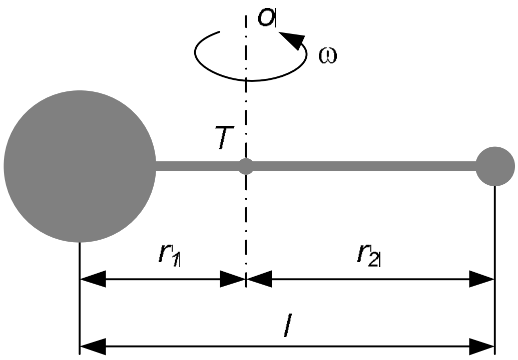
b.) Středem tyče

Kuličky pokládejme za hmotné body.

Řešení:

m_1 = 0,0 kg; m_2 = 0,10 kg; l = 0,80 m;   ω = 10 rad/s; E_K = ?J

a.) Nejprve určíme polohu těžiště soustavy. Označíme – li vzdálenosti kuliček od těžiště r_1 a r_2 (…), platí vztahy $r_1 + r_2 = l$ *a* $m_1 r_1 = m_2 r_2$.



Z těchto vztahů určíme vzdálenosti $r_1 = \dfrac{m_2 l}{m_1 + m_2}$ *a* $r_2 = \dfrac{m_1 l}{m_1 + m_2}$.

Pro dané hodnoty je r1 = 0,20 m a r2 = 0,60 m.

Moment setrvačnosti kuliček vzhledem k ose procházející těžištěm je $J_0 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = 0{,}048\, kg \cdot m^2$

Nyní určíme kinetickou energii soustavy: $E_{K1} = \dfrac{1}{2} J_0 \omega^2$.

Pro dané hodnoty je EK1 = 2,4 J

b.) Osa otáčení prochází středem tyče, vzdálenosti kuliček od osy jsou tedy stejné, $r_1 = r_2 = \dfrac{l}{2}$. *Moment setrvačnosti* $J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 = 0{,}064\, kg \cdot m^2$. *Kinetická energie* $E_{K2} = \dfrac{1}{2} J \omega^2$. *Pro dané hodnoty je nyní E_{K2} = 3,2 J*

Kinetická energie soustavy vzhledem k ose procházející těžištěm je 2,4 J, vzhledem k ose jdoucí středem tyče je 3,2 J.

Vidíme, že moment setrvačnosti, a tím i kinetická energie otáčejícího se tělesa, závisí na poloze osy. Moment setrvačnosti J_0 vzhledem ose procházející těžištěm je menší než moment setrvačnosti J vzhledem k ose, která těžištěm neprochází.

6.9.3 Složený pohyb

Koná – li těleso současně posuvný pohyb a otáčivý pohyb kolem osy procházející těžištěm tělesa, je kinetická energie dána součtem energie posuvného pohybu a otáčivého pohybu: $E_K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_0\omega^2$

V tomto vztahu je m hmotnost tělesa, kterou si představujeme umístěnou v těžišti tělesa, $\boldsymbol{v}$ je rychlost těžiště tělesa, J_0 moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení jdoucí těžištěm tělesa a ω úhlová rychlost otáčení tělesa kolem této osy.

Příklad:

Dutý a plný válec o stejných hmotnostech a stejných poloměrech se otáčejí kolem rotační osy stejnou úhlovou rychlostí. Který válec má větší kinetickou energii?

Příklad:

Rotor elektromotoru má moment setrvačnosti 1,2 kg/m2 a koná 50 otáček za sekundu. Jakou má kinetickou energii?

Příklad:

Ve vrcholech čtverce z tenkého drátu o zanedbatelně malé hmotnosti a délce 0,2 m jsou umístěny čtyři kuličky, každá o hmotnosti 0,1 kg. Vypočtěte moment setrvačnosti této soustavy vzhledem k ose kolmé k rovině čtverce a procházející

a.) středem čtverce

b.) jedním vrcholem čtverce

Kuličky považujte za hmotné body.

[a.) 0,008 kgm2; b.) 0,016 kgm2]

6.10 Jednoduché stroje

Jednoduché stroje jsou zařízení, která přenášejí sílu a mechanický pohyb z jednoho tělesa na jiné těleso. Usnadňují konání práce tím, že umožňují měnit směr a velikost působící síly.

Rozlišujeme dvě skupiny jednoduchých strojů:

- stroje založené na rovnováze momentů sil – patří k nim:
  - páka
  - kladka
  - kolo na hřídeli

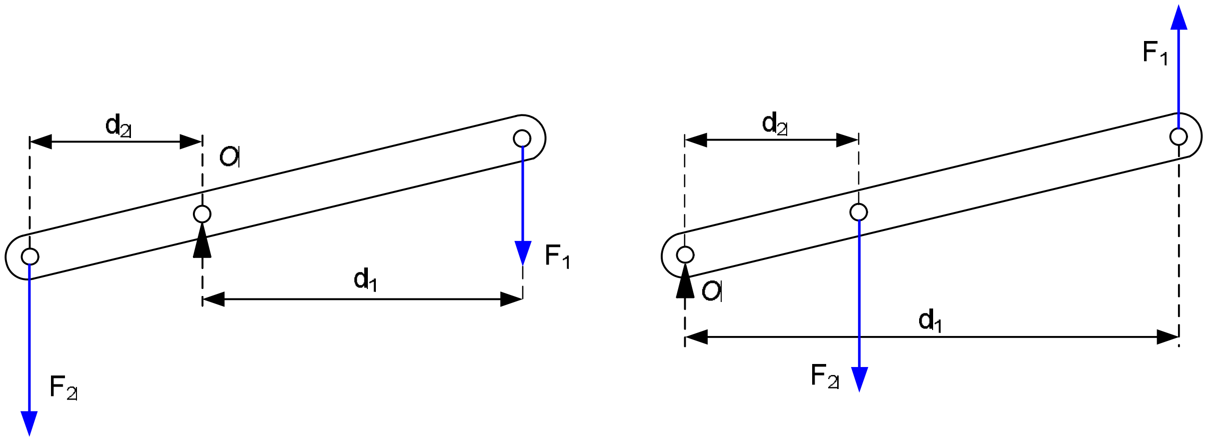
- stroje založené na rovnováze sil – patří k nim:
  - nakloněná rovina
  - klín
  - šroub

6.10.1 Páka

Páka je pevná tyč otáčivá kolem osy, která je k ní kolmá (Obrázek 27). Působí – li síly $\boldsymbol{F_1}$ a $\boldsymbol{F_2}$ na různých stranách od osy otáčení procházející bodem O, jde o páku dvojzvratnou. Působí – li na téže straně od osy, jde o páku jednozvratnou.

Páka je v rovnovážné poloze, jsou – li momenty $\boldsymbol{M_1}$ a $\boldsymbol{M_2}$ sil stejně velké, tj. je – li $M_1 = M_2$ neboli $F_1 d_1 = F_2 d_2$

Kde d_1 a $d2$ jsou ramena daných sil. Na činnosti páky jsou založeny různé pracovní nástroje.

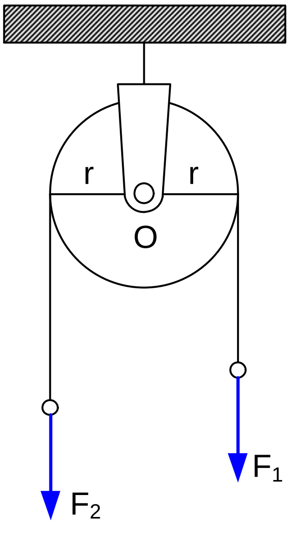


$$F_1 d_1 = F_2 d_2$$

Obrázek 27 - Rovnováha sil na páce

6.10.2 Kladka pevná

Kladka pevná je v podstatě dvojzvratná rovnoramenná páka, jejíž ramena se rovnají poloměru kladky (Obrázek 28). Z rovnováhy momentů vyplývá $F_1 r = F_2 r$ a odtud $F_1 = F_2$



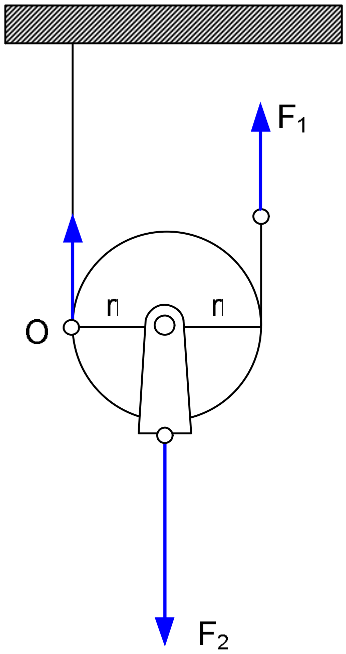
$$F_1 = F_2$$

Obrázek 28 - Rovnováha sil na pevné kladce

Pevná kladka slouží ke změně směru působící síly.

6.10.3 Kladka volná

Kladka volná pracuje jako páka jednozvratná s rameny *r* a *2r*. Z rovnováhy momentů dostáváme $F_1 2r = F_2 r$ a odtud pak $F_1 = \frac{1}{2} F_2$



$$F_1 = \frac{F_2}{2}$$

Obrázek 29 - Rovnováha sil na volné kladce

Kombinací pevné a volné kladky vzniká kladkostroj.

6.10.4 Kolo na hřídeli

Kolo na hřídeli pracuje rovněž jako dvojzvratná páka, jejíž ramena tvoří poloměr hřídele *r* a poloměr kola *R*. Kolo na hřídeli je v rovnovážné poloze, platí – li, že $F_1 R = F_2 r$

Seznam použité literatury

/1/ *Milan Bednařík, Miroslava Široká: Fyzika pro gymnázia – Mechanika. Prométheus. Praha 1993*

/2/ *Karel Bartuška, Emanuel Svoboda: Fyzika pro gymnázia – Molekulová fyzika a termika. Prométheus. Praha 1993*

/3/ *Oldřich Lepil, Milan Bednařík, Radmila Hýblová: Fyzika pro střední školy – I. Prométheus. 1993*

/4/ *Oldřich Lepil, Milan Bednařík, Radmila Hýblová: Fyzika pro střední školy – II. Prométheus. 1993*

/5/ *Pavel Tarábek, Petra červinková a kol.: Odmaturuj z fyziky. Nakladatelství Didaktik. Brno 2004*

/6/ *Emanuel Svoboda, Karel Bartuška, Milan Bednařík, Oldřich Lepil, Miroslava Široká:Přehled středoškolské fyziky. Prométheus. 1996*