FYZIKA

MECHANICKÉ KMITÁNÍ

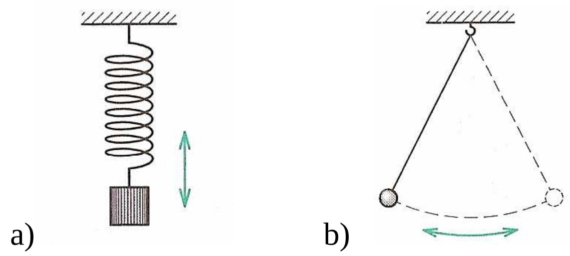
Studijní texty pro 2. ročník

OBSAH

Kmitavý pohyb (mechanické kmitání) je po pohybech přímočarých a křivočarých třetím základním typem pohybu, s níž se setkáváme jak v přírodě, tak v technické praxi. Pro mechanické kmitání je charakteristické, že kmitající těleso při pohybu zůstává stále v okolí určitého bodu, označovaného jako rovnovážná poloha. Jestliže těleso pravidelně prochází rovnovážnou polohou, koná periodický kmitavý pohyb. Takto se pohybuje například těleso zavěšené na pružině, struna hudebního nástroje a periodicky pracuje také naše srdce. Kmitavý pohyb konají písty v automobilu a strojní součásti řady nejrůznějších výrobních zařízení. Periodické opakování charakterizuje i jiné fyzikální děje, zejména děje elektrické (např. děje v elektrických obvodech, kterými prochází elektrický proud nebo vysílání a příjem signálů rozhlasu a televize).

1.1 Kmitavý pohyb

Zařízení, které volně, tzn. bez vnějšího působení, kmitá, je **mechanický oscilátor**. Velmi jednoduchý mechanický oscilátor tvoří těleso (např. kovový váleček) zavěšené na pružině (obr 1a)).



Obr. 1 -Mechanické oscilátory - a) pružinový oscilátor b) kyvadlo

Jestliže na pružinu zavěsíme těleso, pružina se prodlouží a vzniklý mechanický oscilátor zaujme **rovnovážnou polohu**. V ní na těleso působí dvě stejně velké síly opačného směru:

- tíhová síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{G}}$
- síla pružnosti $\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$

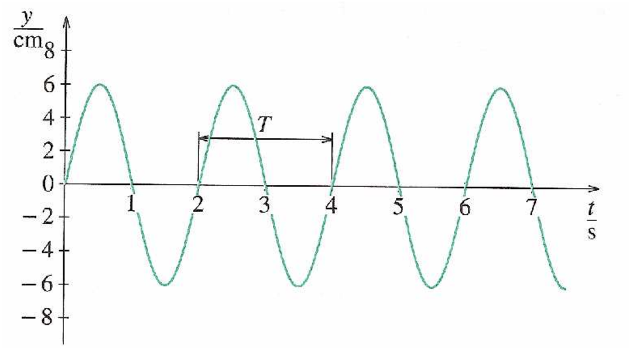
Když např. tahem pružinu prodloužíme, síla pružnosti se zvětší a po uvolnění uvede těleso do kmitavého pohybu. Příčinou kmitání je tedy síla pružnosti, která vzniká při deformaci pružiny.

Kmitavý pohyb koná rovněž těleso zavěšené na pevném vlákně, které rozkmitáme vychýlením z rovnovážné polohy. Takový oscilátor nazýváme **kyvadlo (**obr. 2b)). Příčinou kmitání kyvadla je pohybová složka tíhové síly.

Trajektorie kmitajících těles může být:

- přímočará
- křivočará

Zaměříme se na kmitavý pohyb, který probíhá po přímce. Takto kmitá těleso zavěšené na pružině = **pružinový oscilátor**. Trajektorie kmitavého pohybu tělesa (jeho těžiště) je úsečka a těleso se periodicky pohybuje mezi jejími krajními body. Závislost okamžité polohy kmitajícího tělesa na čase zobrazuje časový diagram - na ose *x* je čas *t* a veličina na ose *y* je úměrná okamžité poloze tělesa:



Obr. 2 - Časový diagram kmitání pružinového oscilátoru

Z časového diagramu je patrné, že

- při kmitavém pohybu těleso urazí ve stejných časových intervalech různé dráhy a jeho rychlost se tedy mění - tzn., že **kmitavý pohyb je pohyb nerovnoměrný**
- kmitající těleso vždy po uplynutí určité doby dospěje do stejné polohy. Tuto **periodicky se opakující část kmitavého pohybu nazýváme kmit**

Kmit mechanického oscilátoru, ale i každého periodického děje charakterizují dvě veličiny:

1. **Perioda (doba) kmitu *T*, za kterou proběhne jeden kmit a oscilátor dospěje do stejné polohy jako v počátečním okamžiku.**
2. **Frekvence (kmitočet) *f*, který je roven počtu kmitů za jednu sekundu. Je to převrácena hodnota periody:**

$$f = \frac{1}{T}$$

Jednotkou periody je *sekunda* (s), jednotkou frekvence je *hertz* (Hz).

$$[f] = \frac{1}{[T]} = \frac{1}{\mathrm{s}} = \mathrm{Hz}$$

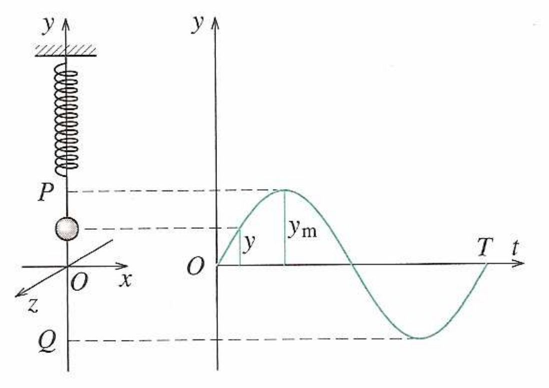
Příklady některých kmitavých pohybů spolu s jejich frekvencí zobrazuje tab. 1.

Tab. 1 - Příklady kmitavých pohybů

Periodický děj	Perioda *T* (s)	Frekvence *f* (s)
Kmitání lidského srdce	0,8	1,25
Střídavý proud v elektrické síti	0,02	50
Zvuk tónu a^1 (komorní a)	$2{,}27 \cdot 10^{-3}$	440
Tón časového signálu v rozhlase	10^{-3}	10^{3}
Kmitání křemenného krystalu v hodinkách (přibližná hodnota)	$3 \cdot 10^{-5}$	$3{,}3 \cdot 10^{4}$
Kmitání procesoru počítače (příklad)	$2{,}5 \cdot 10^{-9}$	$4 \cdot 10^{8}$
Frekvenční pásmo mobilních telefonů	$1{,}1 \cdot 10^{-9}$	$9 \cdot 10^{8}$
Signál družicové televize (řádově)	10^{-11}	10^{11}

1.2 Kinematika kmitavého pohybu

Základní popis kmitavého pohybu spočívá ve vyjádření okamžité polohy kmitajícího tělesa (jeho těžiště) jako funkce času. Pro popis kmitání pružinového oscilátoru zvolíme vztažnou soustavu tak, že oscilátor kmitá ve směru osy *y*. Bodu *0* odpovídá rovnovážná poloha oscilátoru (obr. 3)



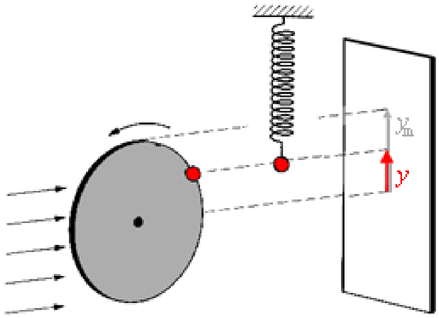
Obr. 3 - K výkladu základních pojmů kmitavého pohybu

Okamžitá poloha těžiště kmitajícího tělesa je určena souřadnicí *y*, kterou nazýváme **výchylka** z rovnovážné polohy. Souřadnice *x* a *z* jsou při pohybu stále nulové.

Při pohybu mechanického oscilátoru se výchylka *y* s časem periodicky mění a vzhledem k rovnovážné poloze nabývá kladných i záporných hodnot. V určitých časech dosahuje výchylka největší kladné, popř. záporné hodnoty. Kladná hodnota největší výchylky je amplituda výchylky y_m nebo krátce amplituda.

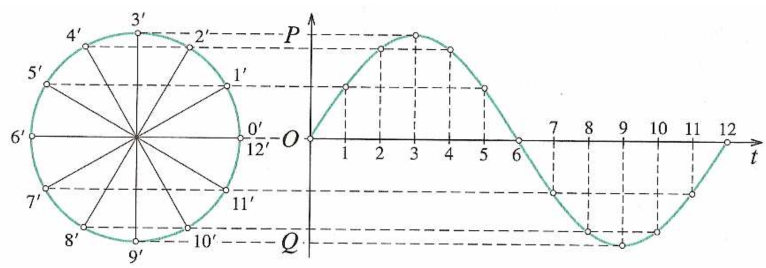
Pokud začneme měřit čas v okamžiku, kdy při pohybu směrem vzhůru oscilátor prochází rovnovážnou polohou, výchylka oscilátoru se s časem mění podle funkce sinus. Kmitavý pohyb, jehož časovým diagramem je sinusoida (popř. kosinusoida) = **harmonický kmitavý pohyb** (nebo obecně **harmonické kmitání**).

Vztah pro okamžitou výchylku harmonického pohybu můžeme odvodit srovnáním s pohybem po kružnici. **Kmitavý pohyb odpovídá průmětu pohybu rovnoměrného po kružnici do svislé roviny.**



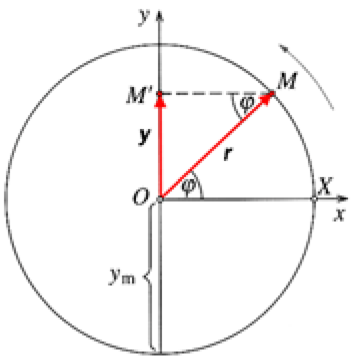
Obr. 4 - Demonstrace souvislosti kmitavého pohybu s pohybem po kružnici

To dokážeme i geometrickou konstrukcí průmětu okamžitých poloh rotující kuličky do osy y souřadnicové soustavy. Grafem souřadnice y okamžitých poloh kuličky jako funkce času je sinusoida.



Obr. 5 - časový diagram kmitavého pohybu

Promítneme-li celý kmitavý pohyb do kružnice, můžeme pomocí jednoduchých geometrických úvah z obrázku odvodit rovnici pro okamžitou výchylku při harmonickém pohybu.



Obr. 6 - K odvození vztahu pro okamžitou výchylku kmitavého pohybu

Úhel $\varphi = \omega t$ je fáze kmitavého pohybu a v každém okamžiku jednoznačně určuje výchylku oscilátoru, který koná harmonický pohyb. Velikost průvodiče r odpovídá největší výchylce bodu M z rovnovážné polohy. Je to amplituda y_m kmitavého pohybu ($r = y_m$).

Pro výchylku harmonického pohybu tělesa, které se v počátečním okamžiku nachází v rovnovážné poloze, platí vztah:

$$y = y_m \sin \omega t$$

Veličina ω představuje v mechanice při výkladu pohybu rovnoměrného po kružnici úhlovou rychlost. U kmitavých dějů se tato veličina nazývá **úhlová frekvence**:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Jednotka úhlové frekvence $[\omega] = s^{-1}$

Příklad 1:

Hmotný bod kmitá harmonicky s amplitudou 1,5 cm a s periodou 0,2 s. Napište rovnici harmonického kmitání.

Řešení:

$\underline{y_{\mathrm{m}} = 1{,}5\ cm = 1{,}5\ .\ 10^{-2}\ m,\ T = 0{,}2\ s;\ y = ?}$

Určíme úhlovou frekvenci harmonického kmitání:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}2}\,\mathrm{s}^{-1} = 10\pi\mathrm{s}^{-1}$$

Při numerických výpočtech zpravidla vyjadřujeme vztahy mezi číselnými hodnotami veličin. Rovnici harmonického kmitání napíšeme ve tvaru

$$\{y\} = 1{,}5 \cdot 10^{-2} \sin 10\pi\{t\}$$

Příklad 2:

Rovnice harmonického kmitání má tvar:

$\{y\} = 5{,}0\ .\ 10^{-3} \sin 4\pi\{t\}$.

Určete a) amplitudu výchylky harmonického kmitání, b) jeho frekvenci.

Příklad 3:

Určete dobu od počátečního okamžiku, za kterou hmotný bod kmitající podle rovnice v úloze 2 výchylky -5 mm.

Příklad 4:

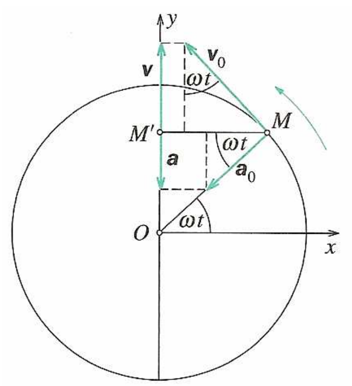
Nejtenčí struna kytary vydává tón e^1 *o frekvenci přibližně 330 Hz. Napište rovnici harmonického kmitání bodu uprostřed struny, jestliže jsme střed struny vychýlili o 2 mm. Za počáteční okamžik volte průchod bodu rovnovážnou polohou. Předpokládáme, že struna kmitá delší dobu se stálou amplitudou.*

1.3 Rychlost a zrychlení kmitavého pohybu

Z pozorování kmitavého pohybu tělesa na pružině můžeme usoudit, že rychlost tělesa je největší, jestliže těleso prochází rovnovážnou polohou, tzn. $y = 0$. Naopak, když je těleso v maximální výchylce ($y = \pm y_m$) je rychlost tělesa nulová.

Vztah pro rychlost kmitavého pohybu bychom opět našli na základě souvislosti s rovnoměrným pohybem po kružnici. Vektor rychlosti $\boldsymbol{v}_0$ pohybu rovnoměrného po kružnici má směr tečny v daném bodě trajektorie a velikost rychlosti $v_0 = \omega r$. Rychlost $\boldsymbol{v}$ kmitavého pohybu je průmětem vektoru $\boldsymbol{v}_0$ do osy y. Z obr. 7 je patrné, že $v = v_0 \cos \omega t = \omega r \cos \omega t$. Poněvadž $r = y_{\mathrm{m}}$, je výsledná **vztah pro rychlost kmitavého pohybu**:

$$\boxed{v = \omega y_m \cos \omega t}$$



Obr. 7 - K odvození vztahu pro rychlost a zrychlení kmitavého pohybu

Obdobnou úvahou najdeme vztah pro zrychlení kmitavého pohybu. Vektor zrychlení $\boldsymbol{a}_0$ pohybu rovnoměrného po kružnici směřuje do středu kružnicové trajektorie (dostředivé zrychlení) a jeho velikost $a_0 = \omega^2 r$. Zrychlení kmitavého pohybu $\boldsymbol{a}$ je průmětem vektoru $\boldsymbol{a}_0$ do osy y. Vidíme, že vektor $\boldsymbol{a}$ má opačný směr, než v daném okamžiku vektor $\boldsymbol{y}$ na obr. 6. Proto má souřadnice zrychlení a opačné znaménko než výchylka y a platí pro ni vztah:

$$\boxed{a = -a_0 \sin \omega t = -\omega^2 r \sin \omega t}$$

Poněvadž $r = y_m$ a $y_m \sin \omega t = y$, platí:

$$a = -\omega^2 y$$

Zrychlení harmonického pohybu je přímo úměrné výchylce a v každém okamžiku má opačný směr.

Kmitavý pohyb je při pohybu tělesa

- z rovnovážné polohy zpomalený
- při pohybu do rovnovážné polohy zrychlený.

Na rozdíl od pohybu rovnoměrně zrychleného se však velikost zrychlení mění a dosahuje největší hodnoty (amplituda zrychlení) v okamžiku, kdy je kmitající těleso v největší vzdálenosti od rovnovážné polohy. Amplituda zrychlení má velikost $a_m = \omega^2 y_m$.

Tab. 2 - Vztahy pro kinematické veličiny harmonického kmitání

Veličina	Rovnice	Amplituda
y	$y = y_m \sin \omega t$	y_m
v	$v = \omega y_m \cos \omega t$	$v_m = \omega y_m$
a	$a = -a_m \sin \omega t = -\omega^2 y$	$a_m = \omega^2 y_m$

1.4 Fáze kmitavého pohybu

Často potřebujeme zapsat rovnici harmonického kmitání pro případ, že těleso je v počátečním okamžiku mimo rovnovážnou polohu, popř. chceme popsat kmitání dvou oscilátorů, které nekmitají synchronně.

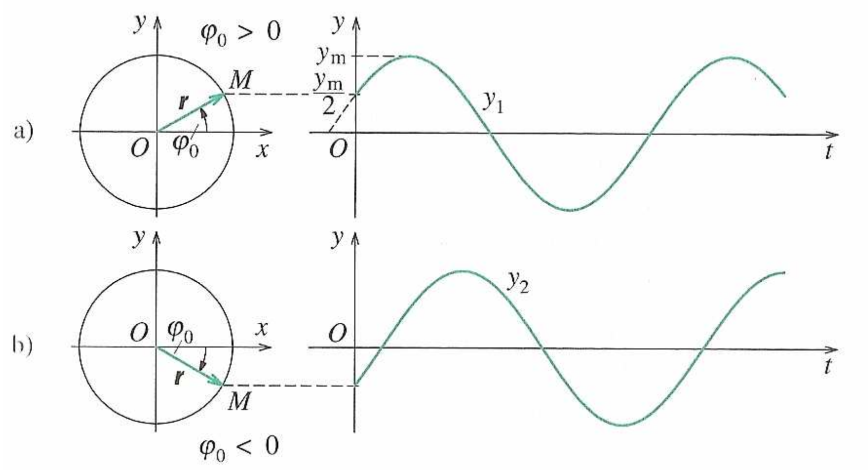
Na obr. 8 je časový diagram kmitavého pohybu, jehož výchylka v čase $t = 0$ a $y_1 = 1/2\ y_m$. To znamená, že kmitající těleso procházelo rovnovážnou polohou již uplynula doba t_0. Rovnice kmitání tedy bude mít tvar

$$y_1 = y_m \sin \omega(t + t_0) = y_m \sin(\omega t + \omega t_0)$$

Jestliže označíme $\omega t = \varphi_0$, dostaneme:

$$y_1 = y_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$

- φ_0 **– počáteční fáze kmitavého pohybu**; určuje výchylku, popř. jinou veličinu harmonického kmitání (např. rychlost u zrychlení) v počátečním okamžiku t_0



Obr. 8 - K výkladu počáteční fáze

Počáteční fáze je důležitá zejména pro posouzení vzájemných vztahů fyzikálních veličin kmitavého pohybu. Obvykle vyjadřuje **fázový rozdíl** těchto veličin.

Jestliže dvě harmonické veličiny mají stejnou úhlovou frekvenci a počáteční fáze φ_{01} a φ_{02}, platí pro fázový rozdíl $\Delta\ \varphi$:

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_{02}) - (\omega t + \varphi_{01}) = \varphi_{02} - \varphi_{01}$$

Fázový rozdíl dvou harmonických veličin o stejné frekvenci je určen rozdílem jejich počátečních fází.

Zvláštní význam mají případy, kdy mezi dvěma veličinami harmonického pohybu stejné frekvence je fázový rozdíl $2k\pi$ a $2(k + 1)\pi$, kde $k = 0, 1, 2$ ….V prvním případě mají obě veličiny **stejnou fázi** a ve druhém **opačnou fázi**. Zrychlení kmitavého pohybu má tedy vzhledem k okamžité výchylce opačnou fázi.

Příklad 1:

Mechanický oscilátor byl v rovnovážné poloze v čase t = T/8. Určete počáteční fázi kmitání a napište rovnici pro výchylku oscilátoru.

Příklad 2:

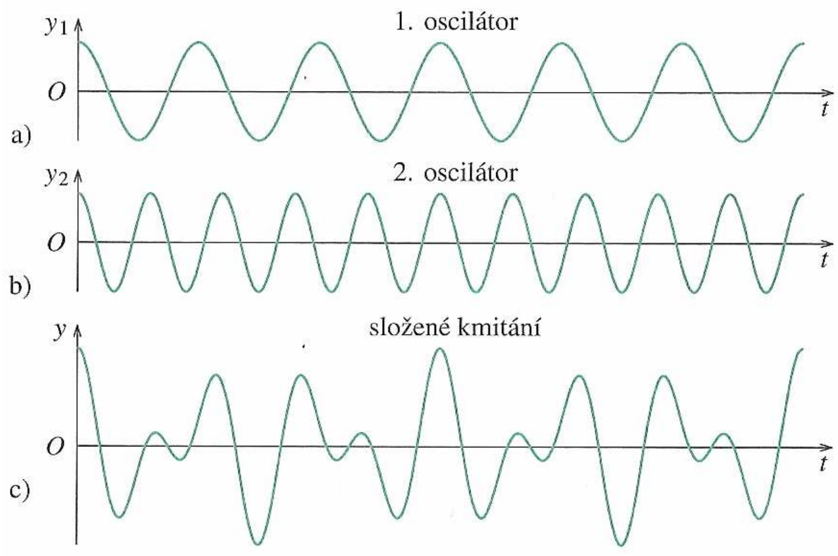
Dva mechanické oscilátory kmitají harmonicky se stejnou frekvencí tak, že v počátečním okamžiku mají výchylku $y_m / \sqrt{2}$ *, ale pohybují se opačným směrem. Určete počáteční fázi a fázový rozdíl kmitání oscilátorů*

Příklad 3:

Mechanický oscilátor harmonicky kmitá podle vztahu $y = y_m \cos(\omega t + \varphi_0)$. *Určete počáteční fázi kmitání, jestliže v počátečním okamžiku (t=0) je výchylka oscilátoru a) –* y_m*, b) 0, c)* $y_m/2$.

1.5 Složené kmitání

Provedeme pokus se dvěma oscilátory spojenými navzájem gumovým vláknem. Střed *S* vlákna zvýrazníme např. kouskem polystyrenu. Rozkmitáme-li jen první oscilátor, kmitá bod *S* podle obr. 9a). Podobné kmitání vznikne, když kmitá jen druhý oscilátor (obr 9b)). Jestliže však kmitají oba oscilátory současně, koná bod S periodický pohyb, jehož časový diagram je na obr 9c). Vzniká **složené kmitání**.



Obr. 9 - Složené kmitání

Z mechaniky víme, že výsledná poloha tělesa, které současně koná více pohybů, je stejná, jako kdyby tyto pohyby konalo po sobě v libovolném pořadí. Tento poznatek platí i pro kmitavé pohyby a označujeme ho jako **princip superpozice**:

Jestliže hmotný bod koná současně několik harmonických kmitavých pohybů téhož směru s výchylkami $y_1, y_2, \ldots, y_k$, je výchylka y výsledného kmitání

$$y = y_1 + y_2 + \ldots + y_k\,.$$

Výchylky mohou mít v určitém okamžiku kladnou i zápornou hodnotu. Proto se při superpozici sčítají a odečítají.

Časový průběh výchylky složeného kmitání závisí na amplitudě, úhlové frekvenci a počáteční fázi jednotlivých složek a často je i značně složitý.

Nejjednodušší výsledek dostaneme superpozicí dvou harmonických kmitání o stejné amplitudě ($y_{m1} = y_{m2} = y_m$), které probíhají v jedné přímce a se stejnou úhlovou frekvencí. Jejich výchylky vyjadřují rovnice:

$$y_1 = y_m \sin(\omega t + \varphi_{01})$$

$$y_2 = y_m \sin(\omega t + \varphi_{02})$$

Časový diagram složeného kmitání lze získat různým způsobem

- Grafický způsob:

Sečteme, popř. odečteme délky úseček odpovídajících výchylkám v jednotlivých okamžicích s přihlédnutím ke znaménku výchylky. Křivka proložená koncovými body součtů úseček určuje časový průběh složeného kmitání.

- Pomocí počítače:

Pro počítače existuje řada programů na superpozici kmitání

Skládáním dvou harmonických kmitní stejného směru a o stejné frekvenci vzniká opět harmonické kmitání téže frekvence. Jeho amplituda závisí na fázovém rozdílu složek.

- Jestliže fázový rozdíl $\Delta\varphi = 0$, tzn. Při stejné počáteční fázi obou složek ($\varphi_{01} = \varphi_{02}$), je amplituda složeného kmitání největší:

$$y_m = y_{m1} + y_{m2}$$

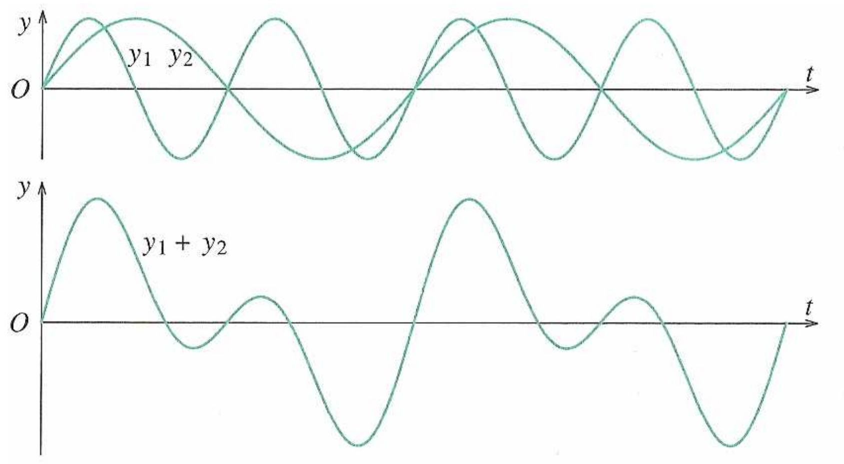
  Složené kmitání má stejnou počáteční fázi jako složky.

- Jestliže fázový rozdíl $\Delta\varphi = \pi$, tzn. Při opačné počáteční fázi obou složek ($\varphi_{02} = - \varphi_{01}$), je amplituda složeného kmitání nejmenší:

$$y_m = |y_{m1} - y_{m2}|$$

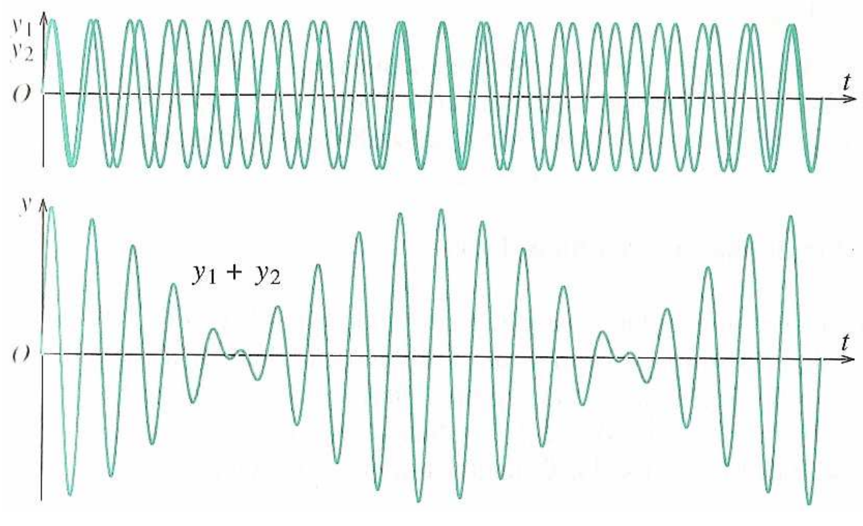
  Složené kmitání má stejnou počáteční fázi jako složka s větší amplitudou. V případě stejných amplitud složek ($y_{m1} = y_{m2}$) je výchylka stále nulová a kmitání zaniká.

Superpozicí kmitání různé úhlové frekvence, tzn. když $\omega_1 \neq \omega_2$, vzniká složené kmitání, které není harmonické. Např. na obr. 10 je časový diagram složeného kmitání, jehož složky mají stejnou amplitudu i počáteční fázi a jejich úhlové frekvence jsou v poměru 1 : 2.



Obr. 10 - Časový diagram složeného kmitání s různou frekvencí složek

Zvláštní případ nastává, když se úhlové frekvence složek velmi málo liší ($\omega_1 \rightarrow \omega_2$) (obr. 11). Amplituda výsledného kmitání se periodicky zvětšuje a zmenšuje. Vzniká složené kmitání, které se periodicky zvětšuje a zmenšuje. Vzniká složené kmitání, které nazýváme **rázy**. Amplituda rázů se mění s frekvencí $f = f_1 - f_2$. to znamená, že při postupném přibližování frekvencí obou kmitání se frekvence rázů zmenšuje a při $f_1 = f_2$ rázy zaniknou



Obr. 11 - Časový diagram složeného kmitání s blízkou frekvencí složek

1.6 Dynamika kmitavého pohybu

Dynamika zkoumá příčiny pohybu. Příčinou kmitání mechanického oscilátoru je buď síla pružnosti nebo tíhová síla. Poněvadž zrychlení harmonického kmitavého pohybu $a = -\omega^2 y$, můžeme na základě 2. Newtonova pohybového zákona ($\boldsymbol{F}$ = m$\boldsymbol{a}$)obecně vyjádřit sílu, která způsobuje harmonické kmitání:

$$F = -m\omega^2 y$$

Tuto rovnici označujeme jako **pohybovou rovnici mechanického oscilátoru.**

Pro určení souvislosti úhlové frekvence ω s konkrétními vlastnostmi mechanického oscilátoru (**parametry oscilátoru**) budeme používat pružinový oscilátor, jehož kmitání způsobuje síla pružnosti.

Parametry pružinového oscilátoru, který tvoří těleso zavěšené na pružině, jsou

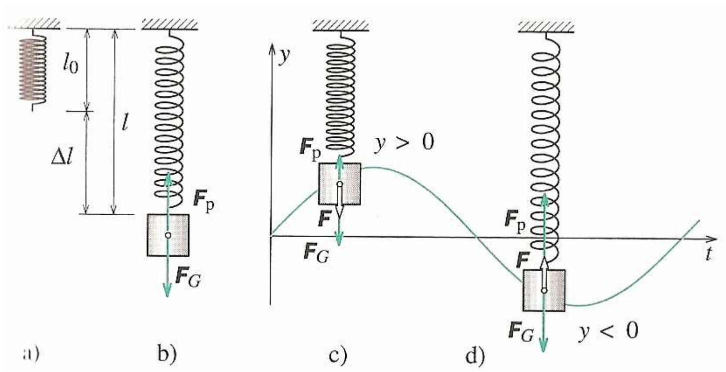
- hmotnost m tělesa a
- tuhost k pružiny

Tuhost pružiny je vlastnost pružiny, která se projevuje při její deformaci. Aby se pružina prodloužila z původní délky l_0 na délku $l = l_0 + \Delta l$, popř. zkrátila na délku $l = l_0 - \Delta l$, musíme ji deformovat působením vnější síly. Reakcí k vnější síla je síla pružnosti $\boldsymbol{F}_\mathrm{p}$, která brání deformaci pružiny. Pokud deformace pružiny probíhá podle Hookova zákona, je síla pružnosti přímo úměrná prodloužení pružiny $F_\mathrm{p} = k\Delta l$. Tuhost pružiny je teda definována vztahem

$$k = \frac{F_p}{\Delta l}$$

Tuhost pružiny je tedy tím větší, čím větší sílu potřebujeme k jejímu prodloužení, popř. zkrácení o stejnou délku. Jednotka tuhosti je *newton na metr*, $\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}$.

Nezatížená pružina má délku l_0 (obr.12a)). Po zavěšení tělesa o hmotnosti m a jeho ustálení v rovnovážné poloze se pružina prodlouží působením tíhové síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{G}$ na délku $l = l_0 + \Delta l$(obr.12 b)). V rovnovážné poloze působí na těleso oscilátoru síla pružnosti $\boldsymbol{F}_\mathrm{p}$, která má stejnou velikost jako tíhová síla $F_\mathrm{G} = mg$, ale opačný směr. Je tedy $k\Delta l - mg = 0$



Obr. 12 - K výkladu vlastního kmitání mechanického oscilátoru

Když oscilátor uvedeme do kmitavého pohybu, síla pružnosti se mění, zatímco tíhová síla zůstává stálá (obr.12 c), d)). Na oscilátor působí výsledná síla $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_p + \boldsymbol{F}_G$, pro kterou platí

$$F = k(\Delta l - y) - mg = k\Delta l - mg - ky = -ky$$

Příčinou harmonického kmitání mechanického oscilátoru je síla, která je přímo úměrná výchylce oscilátoru z rovnovážné polohy a stále směřuje do rovnovážné polohy. U pružinového oscilátoru

$$F = -ky$$

Srovnáme získaný výsledek s pohybovou rovnicí mechanického oscilátoru:

$$-m\omega^2 y = -ky$$

Platí tedy

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Z toho plyne:

Úhlová frekvence volně kmitajícího mechanického oscilátoru závisí jen na jeho parametrech, tj. na hmotnosti m tělesa a tuhosti k pružiny. Takové kmitání nazýváme vlastní kmitání oscilátoru a jeho vlastní úhlovou frekvence označíme ω_0:

$$\omega_0 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Úpravou najdeme vztah pro

- periodu vlastního kmitání pružinového oscilátoru: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$,
- frekvenci vlastního kmitání pružinového oscilátoru: $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Příklad 1:

Pružinový oscilátor vznikl zavěšením tělesa o hmotnosti 10 lg na pružinu, která se prodloužila o 15 cm. Určete periodu oscilátoru (g = 9,8 m . s^{-1})

Příklad 2:

Těleso zavěšení na pružině o tuhosti 50 N . m^{-1} vykoná 50 kmitů za 64 s. Určete hmotnost tělesa.

Příklad 3:

Mechanický oscilátor tvořený tělesem o hmotností 200 g zavěšeným na pružině o tuhosti 32 N . m^{-1}kmitá s amplitudou 4,0 cm. Určete a) rychlost tělesa v rovnovážné poloze, b) největší sílu, která na těleso v průběhu periody působí.

1.7 Kyvadlo

Kyvadlo sehrálo významnou úlohu v historii měření času jako jednoduché zařízení, jehož periodu kmitání lze snadno a poměrně přesně nastavit změnou jediného parametru, kterým je délka kyvadla. U kyvadlových hodin bylo kyvadlo tvořeno tyčí se závažím. Kyvadlo svým pohybem, řídilo pozvolné otáčení soustavy ozubených kol spojených s hodinovými ručičkami, Konstrukcí mechanismu kyvadlových hodin proslul fyzik Christian Huygens (1629 – 1695).

Vývojem moderních časoměrných zařízení pozbyly kyvadlové hodiny na významu. Přesto představuje kmitání kyvadla zajímavý fyzikální problém.

Jako kyvadlo se obvykle označuje jakékoliv těleso zavěšené nad těžištěm, které se může volně otáčet kolem vodorovné osy procházející bodem závěsu kolmo k rovině kmitání. Budeme se zabývat pohybem nejjednoduššího kyvadla v podobě malého tělesa (hmotného bodu) zavěšeného na pevném vlákně zanedbatelné hmotnosti a konstantní délky l. Tento abstraktní model mechanického oscilátoru je ve fyzice nazýván *matematické kyvadlo.*

Harmonické kmitání je přímočarý pohyb. Aby tato podmínka byla splněna i u kyvadla, musí být výchylka tak malá, že oblouk, po němž se těleso pohybuje, můžeme považovat za úsečku. To je dostatečně splněno, jestliže největší úhel α, který vlákno kyvadla při kmitavém pohybu svírá se svislým směrem, nepřekročí 5°. Pak také platí, že $\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha \approx \alpha$. Příčino kmitavého pohybu kyvadla je síla $\boldsymbol{F}$, která je výslednicí tíhové síly $\boldsymbol{F}_{\mathrm{G}}$ a tahové síly $\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}}$, kterou působí vlákno závěsu na těleso. Pro malou výchylku tělesa platí

$$\sin\alpha \approx \alpha \approx \frac{F}{F_G} \approx \frac{x}{l}$$

A pohybovou rovnici kyvadla napíšeme ve tvaru

$$F = -m\omega_2 x = -m\frac{g}{l}x\,.$$

Pro úhlovou frekvenci ω_0 vlastního kmitání kyvadla odtud vyplývá vztah

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

A pro periodou T_0 vlastního kmitání kyvadla platí

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

Perioda kmitání kyvadla nezávisí na hmotnosti tělesa ani na výchylce z rovnovážné polohy. Poněvadž velikost tíhového zrychlení *g* je konstantní, je perioda kmitání určena jen délkou *l* závěsu.

V souvislosti s použitím kyvadla k měření času byl zaveden pojem *kyv*, který kyvadlo vykoná mezi dvěma po sobě jdoucími průchody rovnovážnou polohou. To znamená, že *doba kyvu* τ je rovna polovině periody ($\tau = T/2$).

Příklad:

V kyvadlových hodinách se používalo tzv. sekundové kyvadlo, které při každém průchodu rovnovážnou polohou umožňovalo pootočení mechanismu hodin o jeden dílek odpovídající 1s. Určete délku sekundového kyvadla

Řešení:

$\tau = 1{,}00\ s,\ g = 9{,}81\ m\ .\ s^{-2};\ l = ?$

Sekundové kyvadlo vykonalo za 1,00 s jeden kyv,tzn. Kmitalo s periodou t = 2 τ *= 2,00 s.*

Upravíme vztah pro periodu kyvadla a dosadíme:

$$l = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{(2{,}00s)^2 \cdot 9{,}81m \cdot s^{-2}}{4\pi^2} = 0{,}994m \approx 1\text{m}$$

Sekundové kyvadlo má délku přibližně 1 m.

1.8 Přeměny energie v mechanickém oscilátoru

Aby mechanický oscilátor začal kmitat, musíme mu dodat energii například vychýlením z rovnovážné polohy. Vnější síla vykoná určitou práci a o ni se zvětší mechanická energie oscilátoru. Neuvažujeme-li působení dalších sil, pak je tato energie konstantní.

V průběhu periody kmitavého pohybu mění v souladu se zákonech zachování mechanické energie:

- v okamžiku, kdy oscilátor prochází rovnovážnou polohou, má největší rychlost, a tedy největší kinetickou energii
- v největší vzdálenosti od rovnovážné polohy, kdy je rychlost tělesa nulová, má největší hodnotu potenciální energie (u tělesa zavěšeného na pružině je to potenciální energie pružnosti, u kyvadla je to potenciální energie tíhová).

Při harmonickém kmitavém pohybu mechanického oscilátoru se periodicky mění jeho potenciální energie v energii kinetickou a naopak. Pokud na oscilátor nepůsobí vnější síly, je mechanická energie konstantní. Oscilátor kmitá s konstantní amplitudou.

Kmitání mechanického oscilátoru může být

- **netlumené kmitání**
  - mechanický oscilátor kmitá volně (nepůsobí na něj v průběhu kmitání žádné síly)
  - amplituda kmitání se nemění
  - oscilátor kmitá neomezeně dlouho
- **tlumené kmitání**
  - v reálném prostředí působí na kmitající oscilátor odporové síly
  - ty způsobují, že mechanická energie oscilátoru se mní na jinou formu energie (např. na vnitřní energii okolního prostředí nebo samotného oscilátoru)
  - amplituda kmitů se postupně zmenšuje, až volné kmitání zanikne

Tlumení kmitavého pohybu není způsobeno jen odporem prostředí, ale i ději, které vznikají při deformaci pružiny oscilátoru. Pohyb pružinového oscilátoru by byl tlumený i v případě, kdyby kmital ve vzduchoprázdnu.

Tlumení nemá vliv jen na amplitudu kmitavého pohybu, ale ovlivňuje i periodu kmitání – tlumený oscilátor kmitá volně kmitá s poněkud větší periodou, než jakou by měl netlumený oscilátor se stejnými parametry.

Poznatky o tlumeném kmitání mají značný praktický význam, např. nápravy automobilů jsou spojeny s pružinami, které umožňují pérování náprav a tím zajišťují pohyb automobilu bez velkých výkyvů i po nerovném terénu. Tyto pružiny společně s hmotností automobilu však vytváří mechanický oscilátor, která by se po najetí na terénní nerovnost nebezpečně rozkmital. Proto jsou pružiny doplněny tlumiči pérování, které kmitání automobilu rychle utlumí.

1.9 Nucené kmitání a rezonance mechanického oscilátoru

Z praxe víme, že chceme-li udržet těleso v kmitavém pohybu, je nutno jej pravidelně rozkmitávat, neboť jinak se oscilátor vlivem tlumení za určitou dobu zastaví

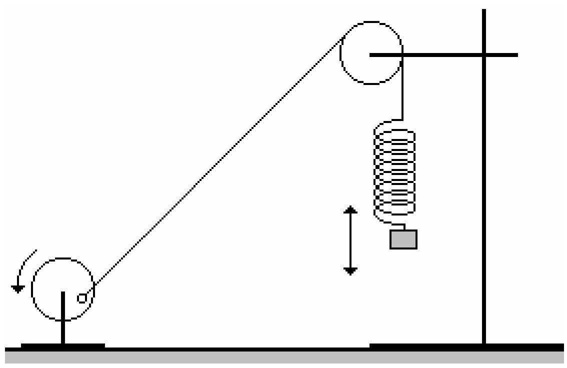
Houpačku udržíme v pohybu pravidelnými nárazy nebo změnou polohy těžiště těla.

Budeme-li na konci každé periody kompenzovat ztráty energie, které vznikly tlumením kmitavého pohybu, bude (při určité velikosti působící síly) amplituda výchylky stálá a oscilátor bude kmitat netlumeně. Netlumeného kmitání jsme dosáhli vnějším působením na oscilátor - mezi oscilátorem a jeho okolím vznikla **vazba**. Oscilátor nekmitá volně - je ovlivňován okolím.

Tímto způsobem realizované kmitání je sice netlumené, ale není harmonické. Abychom získali kmitání harmonické, bylo by nutno nahrazovat ztráty v průběhu celé periody (a ne najednou na jejím konci) nepřetržitým působením vnější síly $\boldsymbol{F}$, která se s časem mění harmonicky, tj. podle vztahu $F = F_m \sin \omega t$.

V příkladu s houpačkou by maminka musela s houpačkou běhat tam a zpátky a přitom houpačce dodávat přesně tu energii, o kterou vlivem ztrát přišla. Takový styl houpání je ale v praxi nepoužitelný …

Tak vznikne netlumené harmonické kmitání, které je vynucováno vnější silou - **nucené harmonické kmitání mechanického oscilátoru**. Lze ukázat, že oscilátor při nuceném kmitání kmitá vždy s frekvencí vnějšího působení (viz obr.13). Tím se liší nucené kmitání od kmitání vlastního, kterému přísluší jen jediná frekvence (vlastní frekvence).



Obr. 13 - Demonstrace nuceného kmitání mechanického oscilátoru

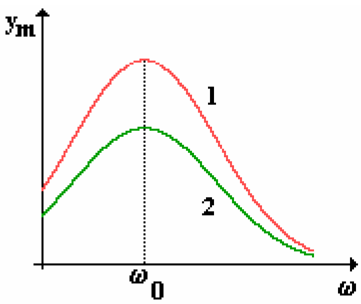
Z hlediska praktického uplatnění je důležité, že takto lze rozkmitat i objekt, který vlastnosti oscilátoru nemá. Vlastnosti objektu nemají vliv na frekvenci kmitání, ale mohou značně ovlivnit amplitudu výchylky nebo fázi kmitavého pohybu.

Nucené kmitání vzniká působením periodické síly na oscilátory i na objekty, které vlastnosti oscilátoru nemají. Frekvence nuceného kmitání závisí na frekvenci působící síly a nezávisí na vlastnostech kmitajícího objektu. Nucené kmitání je netlumené.

Budeme-li např. u zařízení na obr. 13 postupně zvyšovat frekvenci otáčení kotouče, amplituda výchylky nucených kmitů se bude postupně zvětšovat, při určité frekvenci nabývá maximální hodnoty a poté se opět zmenšuje.

Rezonanci lze prozkoumat pomocí hračky, která je tvořena tělesem (panáček, zvířátko), zavěšeným na pružině. Pokud budeme pružinou, kterou budeme držet za opačný konec než je hračka, kmitat ve svislém směru, bude hračka kmitat s určitou amplitudou výchylky. Pokud bude frekvence kmitů ruky velmi malá nebo naopak velmi velká, hračka se bude pohyboval velmi málo - amplituda jejích kmitů bude malá. Pokud zvolíme „tu správnou“ frekvenci (vlastní frekvenci daného mechanického oscilátoru), bude amplituda kmitů hračky velmi velká. Dosáhli jsme rezonance.

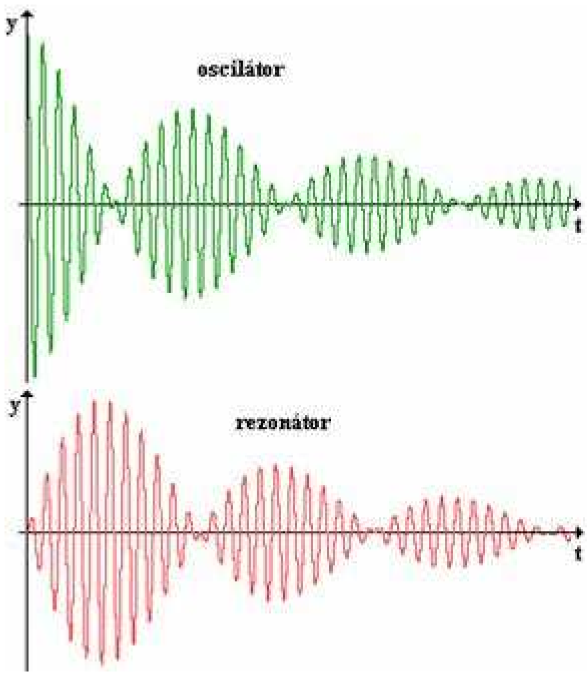
Průběh popsaného pokusu lze také vyjádřit pomocí grafu, z něhož je patrné, že amplituda výchylky nucených kmitů dosáhne maximální hodnoty při frekvenci, která je shodná s frekvencí vlastního kmitání oscilátoru ($\omega = \omega_0$). Došlo k **rezonanci oscilátoru**. Na obr. 14 jsou znázorněny dvě **rezonanční křivky**, u nichž nastala rezonance pro tutéž frekvenci. Křivky se ale liší maximální amplitudou a tvarem, což ukazuje na různé tlumení: křivka *1* odpovídá oscilátoru s malým tlumením, zatímco křivka *2* charakterizuje oscilátor s velkým tlumením.



Obr. 14 - Rezonanční křivka mechanického oscilátoru

U ideálního oscilátoru bez tlumení by amplituda výchylky nucených kmitů při rezonanci rostla neomezeně. Existence tlumení má vliv i na rezonanční frekvenci - s rostoucím tlumením se rezonanční frekvence nepatrně zmenšuje.

Při rezonanční frekvenci dosahuje amplituda nucených kmitů větší hodnoty, než by odpovídalo výchylce způsobené vnější silou při velmi nízké frekvenci. Nastává **rezonanční zesílení** nucených kmitů.



Obr. 15 - Časové diagramy kmitání oscilátoru (nahoře) a rezonátoru (dole)

Rezonanci lze považovat za vzájemné působení dvou oscilátorů: jeden je zdrojem nuceného kmitání (oscilátor) a druhý se působením zdroje nuceně rozkmitává (**rezonátor**). Jednoduchým příkladem oscilátoru a rezonátoru jsou spřažená kyvadla - dvě kyvadla vzájemně spojená pružinou nebo vláknem se závažím. Tak se mezi kyvadly vytváří vazba, která umožňuje přenos energie mezi kyvadly: po rozkmitání oscilátoru *O* se amplituda jeho výchylky postupně zmenšuje a zároveň se zvětšuje amplituda rezonátoru *R*, jehož amplituda dosáhne maxima v okamžiku, kdy kmitání oscilátoru ustalo (viz obr. 15). Tento děj se periodicky opakuje - mezi rezonátorem a oscilátorem se tedy vyměňuje energie. Mezi oscilátory může být:

1. vazba volná - vazbou vzniká jen malé vzájemné působení a energie přechází z oscilátoru na rezonátor dlouho

2. vazba těsná - vzájemné působení je silné, přenos energie je rychlý

Praktické využití rezonance spočívá hlavně v rezonančním zesilování.

U hudebních nástrojů se chvění struny přenáší na tělo nástroje a dochází k rezonančnímu zesílení zvuku struny. Jazýčkový kmitočtoměr (jeden z měřících přístrojů) je tvořen řadou jazýčků s odlišnými rezonančními frekvencemi; jazýček, který se rozkmitá s maximální amplitudou určuje napětí v síti, frekvenci, … Elektrické ladičky hudebních nástrojů využívají také rezonanci k určení frekvence zahrané struny.

Rezonanční zesílení je ale někdy nežádoucí (rozkmitání celého stroje, jehož části se otáčí, …). Tomu lze předcházet:

1. změnou vlastní frekvence mechanismu
2. doplněním mechanismu tlumičem kmitání
3. zvětšení tření mechanismu

LITERATURA

1/ Lepil, O.: *Fyzika pro gymnázia - Mechanické kmitání a vlnění*. Prometheus, Praha, 2001.